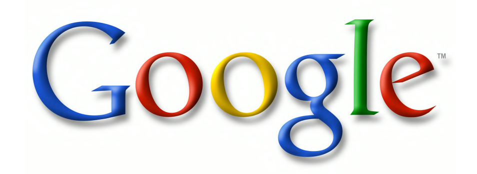
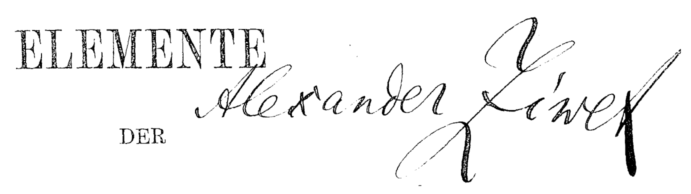




ELEMENTE



DER

PROJECTIVISCHEN GEOMETRIE

VON

Prof. L. CREMONA,
DIRECTOR DER INGENIEURSCHULE IN ROM.

UNTER MITWIRKUNG DES VERFASSERS ÜBERTRAGEN VON

Fr. R. TRAUTVETTER,
LEHRER DER MATHEMATIK IN WINTERTHUR.

Mit 214 Figuren im Text.



STUTTGART.
Verlag der J. G. COTTA'schen Buchhandlung.
1882.

Druck von Gebrüder Kröner in Stuttgart.

Vorwort des Verfassers.

> Amplissima et pulcherrima scientia figurarum. At quam est inepte sortita nomen Geometriæ!
>
> Nicod. Frischlinus, *in Dialogo primo.*
>
> Perspectivæ methodus, quâ nec inter inventas nec inter inventu possibiles ulla compendiosior esse videtur . . .
>
> B. Pascal *in Lit. ad Acad. Paris,* 1654.
>
> Da veniam scriptis, quorum non gloria nobis
> Causa, sed utilitas officiumque fuit.
>
> Ovidius, *in Fastis* III, 9.

Dieses Buch ist nicht für Diejenigen bestimmt, welche den hohen Beruf haben, die Wissenschaft zu fördern; sie würden darin weder neue Theorien noch neue Methoden finden. Alle Lehrsätze sind alt, mehrere gehen auf die Geometer des entferntesten Alterthums zurück. Man findet Spuren davon in Euclid (285 v. Ch.), in Apollonius von Perga (247 v. Ch.), in Pappus von Alexandrien (4 Jahrhunderte n. Ch.), in Desargues von Lyon (1593—1662), in Pascal (1623—1662), in de la Hire (1640—1718), in Newton (1642—1727), in Maclaurin (1698—1746), in J. H. Lambert (1728—1777), u. s. w. Gewöhnlich nennt man die Theorien und Methoden, welche aus diesen Sätzen ein homogenes und harmonisches Ganzes herstellen, neuere Geometrie, weil sie von solchen Geometern ausgebildet und vervollkommnet wurden, die uns weniger ferne stehen, wie Carnot, Brian-

chon, Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles, Staudt,... deren Werke in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts veröffentlicht worden sind.

Der einzige Zweck meiner Arbeit ist, die Kenntniss dieser so schönen und so nützlichen Theorien in den italienischen Schulen zu verbreiten.

Man darf jedoch nicht glauben, dass in Italien nicht schon lobenswerthe Anstrengungen gemacht worden seien, sich mit den neuesten Forschungen der Geometrie auf dem Laufenden zu erhalten. G. Bellavitis war der Erste, wenn ich mich nicht irre, welcher der studirenden Jugend, mit seinem Saggio di geometria derivata *), den Weg dazu gebahnt hat; viele andere Schriften liess er nachfolgen; in Neapel hat N. Trudi *1) die Fragen eines berühmten Programmes gelöst, welchem der Zweck zu Grunde lag, den Methoden der geometrischen Erfindung Aufschwung zu geben und sie zu vergleichen. Im Jahre 1854 führte die Universität von Pavia einen Curs über höhere Geometrie ein und als Italien seine politische Unabhängigkeit wieder gewonnen hatte *2), wurde auf den Vorschlag des Professors Brioschi an allen unseren grossen Universitäten ein Lehrstuhl für jene Wissenschaft errichtet. Der Verfasser hat dieselbe sechs Jahre lang in Bologna unterrichtet (1861—1866) und deren Methoden auf die darstellende Geometrie angewandt *3); später (1867) an die

*) Nuovi Saggi dell' Accademia di Padova, vol. 4⁰. (1838), S. 243—288.

*1) Produzioni relative al programma di tre quistione geometriche, proposto dal prof. V. Flauti nell' aprile 1839 (Napoli, 1840—1841).

Ich citire Bellavitis und Trudi beispielsweise, ohne damit sagen zu wollen, dass nicht noch andere italienische Geometer sich bis zum heutigen Tage mit projectivischer Geometrie beschäftigt haben. Ich bitte, mich zum voraus zu entschuldigen für die Namen, die ich nicht angeführt habe; der Leser sei hiemit versichert, dass es unabsichtlich geschieht; ich habe mir übrigens auch nicht die Aufgabe gestellt, ein historisches Résumé über die Fortschritte der Wissenschaft aufzustellen.

*2) In Neapel war dieser Lehrstuhl durch J. Battaglini besetzt, dessen Wissenschaftlichkeit und dessen Arbeiten allgemein bekannt sind.

*3) Diese Bahn war schon von Anderen eingeschlagen. Siehe Bel-

technische Hochschule in Mailand versetzt und durch den Director, Herrn Brioschi, veranlasst, einen Curs über graphische Statik abzuhalten, fand er es nöthig, als unentbehrliche Vorbereitung darauf, eine ganze Reihe von Vorlesungen der Geometrie der Lage oder der projectivischen Geometrie zu widmen *). So ist jedes Jahr eine grosse Zahl junger Leute mit den neueren Methoden vertraut gemacht worden und haben sie gelernt, dieselben auf die verschiedenen Theile des technischen Zeichnens anzuwenden.

Das Alles genügte nicht; trotz der endlosen Fruchtbarkeit dieser Methoden sind sie so einfach, dass kein Theil der Mathematik so leicht und mit so geringen Vorkenntnissen gelernt werden kann. Um sich davon zu überzeugen, hat man nur zu beachten, dass Staudt seine „Geometrie der Lage“ (1847) schreiben konnte, ohne sich auf einen Begriff der Elementargeometrie zu stützen. Wenn aber dieses vorzügliche Buch keine grössere Anerkennung erhielt, so geschah es, weil es gar keine Figuren mit sich führt und in einem besonders trockenen und gedrängten Styl geschrieben ist. Andere von demselben Gedanken geleitete Schriftsteller *1) haben nach den Fundamentalbegriffen des Raumes, der Fläche, der Linie, des Punktes, der Geraden und der Ebene sogleich diejenigen der Collineation und der Reciprocität aufgestellt. Mit diesem Gedanken wird vielleicht bald auch die Frage über den ersten Unterricht in der Geometrie gelöst; so dass wir dann, wenn ich mich nicht täusche, eine Methode haben werden, die würdig sein wird, die alte von Euclid zu verdrängen.

---

lavitis, Lezioni di geometria descrittiva (Padova 1851). Das vorzügliche Werk von Prof. Fiedler, die Darstellende Geometrie (Leipzig, 1871), ist nach denselben Gedanken abgefasst. E. Padova und A. Sayno haben eine italienische Uebersetzung dieses Werkes für den Gebrauch an polytechnischen Schulen veröffentlicht.

*) In Zürich hielt Professor Reye einen Curs über „Geometrie der Lage“, um die Studirenden auf den Unterricht von Professor Culmann, den Schöpfer der graphischen Statik, vorzubereiten.

*1) Z. B. E. Müller, Elemente der Geometrie, streng systematisch dargestellt (Braunschweig, 1869).



Diese Einfachheit der Lehren, welche die projectivische Geometrie ausmachen, diese Fasslichkeit, welche sie fähig macht, in die Elemente der Wissenschaft einzudringen, ist in solchem Grade anerkannt, dass in allen Ländern namhafte Männer aufgestanden sind, um deren Aufnahme in den Rahmen der Schulpensen zu verlangen. In dem gelehrten und thätigen Deutschland ins Besondere werden immer neue Bücher veröffentlicht, welche die projectivische Geometrie bald allein, bald mit der gewöhnlichen Geometrie, in immer einfacherem Kleide und auch dem weniger Begabten zugänglich machen. Diese für Gymnasien und Realschulen bestimmten Bücher zeigen, dass die Neuere Geometrie jeden Tag mehr in den Unterricht der Mittelschulen eindringt. Werke derselben Art, aber mit unbestimmterem Zwecke, werden auch in England und Frankreich publicirt.

. . . .

Dieses Lehrgebäude, dessen Anfangsgründe wir auseinander setzen wollen, hat verschiedene Namen erhalten. Ich will es nicht „Höhere Geometrie“ heissen, denn das, was einst „höher“ hiess, ist heute höchst elementar, und auch nicht „Neuere Geometrie“, welcher Name nur einen relativen Begriff ausdrückt; wenn übrigens auch die Methoden als moderne angesehen werden können, so ist doch der Stoff grösstentheils ein alter. Der Titel „Geometrie der Lage“, im Sinne Staudt's*), scheint mir ebensowenig der richtige zu sein, weil er die Betrachtung der metrischen Eigenschaften der Figuren ausschliesst. Ich habe den Titel „Projectivische

*) Gleichbedeutend mit demjenigen von Descriptive Geometry von Cayley (Sixth Memoir upon quantics in den Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1859, S. 90). „Géométrie de position“ in dem Sinne von Carnot entspricht einer Auffassung, die ganz von derjenigen verschieden ist, welche ich mit dem Titel meines Buches ausdrücken wollte. Ich berühre nur andere Namen, wie „Géométrie segmentaire“ und „Organische Geometrie“, welche nach meiner Ansicht allzu speciellen Begriffen entsprechen. Dagegen umfasst die Benennung „Geometria derivata“ von Bellavitis ein grösseres Feld als die meinige.

Geometrie“ gewählt *), welcher die wahre Natur der Methoden ausdrückt, die wesentlich auf der centralen oder perspectivischen Projection beruhen. Ich bin in meiner Wahl dadurch bestärkt worden, dass der grosse Poncelet, der Hauptschöpfer der neueren Methoden, sein unsterbliches Buch mit „Traité des propriétés projectives des figures“ (1822) betitelt hat.

Die Nomenclatur, die ich im Texte angewandt habe, ist dieselbe, welche ich seit vielen Jahren in meinen Schriften und öffentlichen Vorlesungen gebrauche. Es ist nicht diejenige einer besonderen Schule; der eine Ausdruck rührt von Steiner, der andere von Poncelet oder Chasles; ich habe mich bemüht, diejenigen zu wählen, welche den Begriffen selbst am besten entsprechen und welche sich am leichtesten in unsere Sprache übertragen liessen; ich habe im Uebrigen Benennungen gewissenhaft respectirt, die von den Schriftstellern allgemein gebraucht werden.

In der Entwicklung der Materie habe ich mich nicht darauf beschränkt, dem einen oder andern Verfasser ausschliesslich zu folgen, vielmehr entlehnte ich Allen gerade so viel, als mir zu meinem Zwecke dienlich schien, welcher der ist, ein durchaus elementares und technisches Buch zu schreiben, das auch denjenigen zugänglich ist, die keine anderen mathematischen Vorkenntnisse besitzen als die ersten Elemente der gewöhnlichen Geometrie. Ich hätte, wie Staudt, alle Vorbegriffe übergehen können; in diesem Falle wäre aber meine Arbeit zu breit geworden, um sie Schülern technischer Anstalten zu widmen, die doch in den vorhergehenden Cursen die gewöhnlichen Elemente der Mathematik verarbeitet haben. Man bedarf nicht der ganzen traditionellen Geometrie, um dieses Buch verstehen zu können: es genügt, die Fundamental-Sätze über den Kreis und die Aehnlichkeit der Dreiecke zu kennen.

---

*) Siehe Klein, Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie (Göttinger Nachrichten, 30. August 1871).



Ich habe gesagt, das Buch soll einen technischen Charakter haben, es soll die Schüler rasch dazu befähigen, die theoretischen Kenntnisse auf die Zeichnung anzuwenden. Aus diesem Grunde habe ich den graphischen Eigenschaften vor den metrischen den Vorzug gegeben; ich habe mich darum mehr an die Methode der Geometrie der Lage von Staudt als an diejenige der Géométrie supérieure von Chasles angelehnt *); ich wollte indessen die metrischen Eigenschaften nicht ganz unberührt lassen, weil ein solcher Vorgang andere praktische Zwecke des Unterrichtes geschädigt hätte *1). Ich habe also den wichtigen Begriff des Doppel-Verhältnisses in mein Buch eingeführt, wodurch es mir möglich geworden, gestützt auf die oben angeführten wenigen Sätze der gewöhnlichen Geometrie, die nützlichsten metrischen Eigenschaften, die den projectivischen Figuren angehören oder innig mit ihnen verknüpft sind, zu behandeln.

Ich habe mich der Centralprojection bedient, um den Begriff der unendlich fernen Elemente aufzustellen und, dem Beispiele Steiner's und Staudt's folgend, das Gesetz der Dualität an den Anfang des Buches gestellt, weil es eine logische Thatsache ist, die sich unmittelbar und selbständig aus der Möglichkeit ergibt, mit dem Punkt oder der Ebene als Element den Raum zu construiren. Die Sätze und Beweise, die sich vermöge dieses Gesetzes paarweise entsprechen, habe ich oft in Doppelcolonnen gebracht; bisweilen aber habe ich auch diese Anordnung verlassen, um den Schülern Gelegenheit zu geben, sich in der Ableitung correlativer Sätze zu üben. Professor Reye bemerkt mit Recht in der Vorrede seines Buches, „es bietet die Geometrie Nichts, was „für den Anfänger so anregend wäre, ihn so zum Selbst-

---

*) Vgl. Reye, Geometrie der Lage (Hannover, 1866), S. XI der Vorrede. Von diesem vortrefflichen Werke erschien die zweite Auflage (1877—1880).

*1) Vgl. Zech, die höhere Geometrie in ihrer Anwendung auf Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung (Stuttgart, 1857), Vorwort.

„schaffen anspornte, wie das Gesetz der Reciprocität; und je „früher er damit bekannt gemacht wird, desto besser.“

Die Anordnung des Stoffes, die ich vorgezogen habe, ist eine von den zahlreichen für den Schulgebrauch erdachten; doch hoffe ich auch für Diejenigen geschrieben zu haben, die es vorziehen, einen anderen Lehrgang einzuschlagen. Ich werde einige Beispiele geben. Schon von Anfang an wechsle ich zwischen den Lehrsätzen der ebenen Geometrie und der Raumgeometrie ab, weil mich die Erfahrung gelehrt hat, und Andere haben vor mir das gleiche bemerkt, dass die Betrachtungen im Raume sehr oft das Mittel an die Hand geben, solche Partien leicht und anschaulich zu machen, die mit blosser Hülfe der ebenen Geometrie complicirt und schwierig darzulegen sind; zudem üben sie den Geist und fördern die Entwicklung der geometrischen Vorstellungskraft, die für den Techniker von so hoher Bedeutung ist, indem er sich die Figuren im Raume ohne Zeichnung und ohne Modell vorzustellen hat; der Lehrer kann es auch für passend erachten, sich wenigstens in den Anfängen, in der ebenen Geometrie allein zu bewegen: er wird in diesem Falle ohne irgend welche Nachtheile einige Nummern des Buches *) übergehen können und sie später vortragen. Ich definire die Kegelschnitte als Projectionen des Kreises und übertrage, nachdem ich für diese Curve zwei Fundamentalsätze *1) bewiesen habe, diese Sätze auf die Kegelschnitte; dann entwickle ich an diesen die ganze Theorie der ein- und umschriebenen Polygone, diejenige der Pole und Polaren, ohne mich weiter mit dem speciellen Fall des Kreises zu beschäftigen. Man könnte auch aus diesen beiden Hauptsätzen für den Kreis die Lehrsätze des Pascal, des Brianchon und des Desargues, sowie die Theorie der Pole ableiten und nachher das Ganze mit Hülfe der Projection oder der Collineation auf die Kegelschnitte anwenden. Es ist kaum nothwendig, sich weiter über diesen Gegenstand zu verbreiten. Ist einmal der Stoff vollkommen beherrscht,

---

*) Nr. 19, 20, 28, 29, 31, 32, 41, 42.
*1) Nr. 108, 110.

so wird jeder Lehrer selbst sehen, welche Vertheilung ihm am besten zusagt; er wird auch von Jahr zu Jahr, je nach den Resultaten seiner eigenen Erfahrung, mehr das Wesentliche von dem Unwesentlichen trennen.

In einem Unterrichtscursus sind nicht alle Nummern meines Buches gleich wichtig und nothwendig. Der weise Lehrer wird leicht inne werden, dass die Zahl der Fundamentalsätze eine sehr geringe ist und dass diese allein dem Gedächtniss einzuprägen sind; alles Andere sind Folgerungen, besondere Fälle und Uebungen. Von diesen Letzteren hat man eine grosse Auswahl; die einen können in der Schule behandelt werden, die andern zu Hause; es wird nothwendig sein, und das ist hier das Wichtigste, dass die Schüler täglich selbst Ableitungen und Lösungen finden, dass sie sich nicht auf die passive Rolle, die von dem Lehrer vorgetragenen Dinge anzuhören und zu wiederholen, beschränken, sondern dass sie zur Erörterung neuer Dinge selbst thätig zu sein, angespornt werden. In dieser und keiner anderen Weise wird es gelingen, in ihnen die Liebe zum Studium anzufachen, und sie dahin zu führen, dass sie die so fruchtbaren Theorien der projectivischen Geometrie vollständig beherrschen. Endlich ist noch darüber zu wachen, dass die theoretischen Schlüsse, die an den Beweisen von Lehrsätzen und der Ableitung von Folgerungen gemacht werden, stets von der graphischen Ausführung der Auflösung von Aufgaben begleitet sei. Man kann hier wiederholen, was Monge für die darstellende Geometrie empfohlen hat *).

Das Meiste verdanke ich den epochemachenden Werken von Poncelet, Steiner, Chasles und Staudt *1); denn

*) Es ist nothwendig (für den Unterricht in darstellender Geometrie), dass das Anhören der Methoden von der Praxis und der Ausführung begleitet sei; so sollen sich die Schüler in den graphischen Constructionen üben... (Programme de la Géométrie descriptive).

*1) Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures (Paris, 1822). — Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, etc. (Berlin, 1832). Gesamm. Werke, I. Bd., S. 228—460 (Berlin, 1881). — Chasles, Traité de Géométrie supérieure (Paris, 1852); Traité des sections coniques (Paris, 1865). —

wer sich der Geometrie widmet, wird stets seine ersten Studien in diesen Werken machen; ihnen habe ich auch ausser dem Wesen der Methoden die Beweise vieler Lehrsätze und die Auflösungen der Aufgaben entnommen. Neben diesen Werken habe ich diejenigen von Apollonius, Pappus, Desargues, de la Hire, Newton, Maclaurin, Lambert, Carnot, Brianchon, Möbius, Bellavitis,... und die Neueren von Zech, Gaskin, Witzschell, Townsend, Reye, Poudra, Fiedler... zu Rathe gezogen.

Um die Schwierigkeiten meines Unternehmens nicht noch grösser zu machen als sie schon sind, habe ich mich der Verbindlichkeit enthoben, beständig die Quellen, deren ich mich bediente, oder die ersten und eigentlichen Verfasser und Erfinder der verschiedenen Sätze oder Theorien, anzuführen. Man möge mich darum entschuldigen, wenn die angeführte Quelle nicht immer die erste ist *), oder wenn das eine oder andere Citat gänzlich fehlt. Meine Citate sind nicht zahlreich; mein Hauptzweck dabei war immer der, die jungen Leute mit den Namen der grossen Geometer und den Titeln ihrer classisch gewordenen Werke bekannt zu machen. Indem ich gewissen Hauptsätzen die berühmten Namen von Euclid, Apollonius, Pappus, Desargues, Pascal, Newton, Carnot... beifügte, wollte ich das Gedächtniss unterstützen, die Dinge selbst fest zu halten und jene wissenschaftliche Neugierde anregen, die so sehr dazu beiträgt, unsere Kenntnisse zu erweitern *1).

Staudt, Geometrie der Lage (Nürnberg, 1847). Ich übergehe stillschweigend andere Schriften dieser grossen Meister, sowie die Werke des berühmten Plücker und anderer Geometer (Seydewitz, Göpel, Weissenborn, de Jonquières, Hesse, Paulus, Schröter, Geiser...), weil ich bei der Abfassung dieses Buches nicht Veranlassung fand, aus ihnen zu schöpfen.

*) Von den genannten Autoren citire ich fast immer die allgemein bekannten Abhandlungen, obschon ihre Entdeckungen bisweilen anderen Orts veröffentlicht wurden. Die Arbeiten von Chasles z. B. über die Theorie der Kegelschnitte gehen zum grossen Theil dem Jahr 1830 voran; diejenigen von Staudt datiren von 1831 etc.

*1) Ich habe oft die „Elemente der Mathematik" von Baltzer citirt,

Die gemachten Citate haben noch den weiteren Zweck, die Furcht derjenigen zu beschwichtigen, welche bei dem blossen Namen der projectivischen Geometrie schon in Aufregung gerathen, als ob es sich um neue Dinge handelte, die von bizarren Köpfen erfunden worden sind. Ich wollte sie überzeugen, dass die meisten dieser Dinge ein ehrwürdiges Alter besitzen, von den Geistern der berühmtesten Denker gereift und seither auf jene ausserordentliche Einfachheit gebracht worden sind, welche Gergonne als das Zeichen der Vollkommenheit für eine wissenschaftliche Theorie betrachtete *). In meiner Analyse werde ich in der Reihenfolge des in dem Buch enthaltenen Stoffes fortschreiten.

Den Begriff der unendlich fernen Elemente verdanken wir dem berühmten Desargues, der vor mehr als zweihundert Jahren schon ausdrücklich parallele Gerade als solche betrachtete, die in unendlicher Ferne zusammenstossen *1) und parallele Ebenen als solche behandelte, die durch eine und dieselbe unendlich ferne Gerade gehen *2).

Derselbe Begriff wurde von Poncelet beleuchtet, der als Folge aus den Postulaten der Geometrie von Euclid zu dem Schlusse kam, dass die unendlich fernen Punkte des Raumes als ein und derselben Ebene angehörend betrachtet werden müssen *3).

---

doch nicht als Originalquelle, sondern mit der Absicht, in dem Studirenden den Wunsch zu wecken, dieses vorzügliche Lehrbuch durchzustudiren.

*) „... Man kann sich nicht rühmen, das letzte Wort einer Theorie gesprochen zu haben, so lange man sie nicht mit wenig Worten einem Vorübergehenden auf der Strasse erklären kann.“ (Chasles, Aperçu historique, S. 115).

*1) Oeuvres de Desargues, réunies et analysées par M. Poudra (Paris, 1864), t. I: Brouillon-projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan (1639), S. 104, 105 et 205.

*2) Loc. cit., S. 105—106.

*3) Traité des propriétés projectives des figures (Paris, 1822, Nr. 96 et 580).



Desargues [*]) und Newton [*1]) haben die Asymptoten der Hyperbel als Tangenten angesehen, deren Berührungspunkte unendlich fern sind.

Die Collineation ebener Figuren wird in einigen älteren Werken über Perspective, zum Beispiel in Lambert [*2]) oder sogar in Desargues [*3]) gefunden, welcher den Lehrsatz über perspectivische oder collineare Dreiecke und Vierecke ausgesprochen und bewiesen hat; der Lehrsatz über die Dreiecke (Nr. 14) fällt übrigens dem Inhalte nach mit einem berühmten Porisma Euclids (Nr. 88) zusammen, das von Pappus [*4]) übertragen wurde. Die Collineation der räumlichen Figuren wurde (unter dem Namen Homologie) zum erstenmal von Poncelet [*5]) betrachtet.

Das Gesetz der Dualität wurde von Gergonne [*6]) als absolutes Princip ausgesprochen; wir verdanken es Poncelet [*7]) als Folge der Polarentheorie (principe de réciprocité polaire).

Die geometrischen Gebilde (Punkte einer Geraden, Strahlenbüschel) findet man, die Namen ausgenommen, in Desargues und den späteren Geometern. Steiner hat sie ausdrücklich definirt [*8]).

Carnot [*9]) hat das vollständige Vierseit betrachtet, Steiner [*10]) hat dessen Begriff auf alle Polygone und die räumlichen Figuren ausgedehnt.

Die harmonische Theilung war den Geometern des ent-

---

*) Loc. cit., S. 210.

*1) Philosophiae naturalis principia mathematica (1686), Buch I, Satz 27, scol.

*2) Freie Perspective, 2te Aufl. (Zürich, 1774).

*3) Loc. cit., S. 413 bis 416.

*4) Chasles, Les trois livres des porismes d'Euclide, etc. (Paris, 1860), S. 102.

*5) Loc. cit., S. 369 u. folg.

*6) Annales de Mathématiques, t. XVI (Montpellier, 1826), S. 209.

*7) Annales de Mathématiques, t. VIII (Montpellier, 1818), S. 201.

*8) Systematische Entwickelung, S. XIII—XIV. Ges. Werke, S. 237.

*9) De la corrélation des figures de Géométrie (Paris, 1801), S. 122

*10) Loc. cit., S. 72 und 235. § 19, 55.

ferntesten Alterthums bekannt; man findet die Fundamental-Eigenschaften derselben z. B. in Apollonius *); de la Hire *1) gibt die Construction des vierten Elementes einer harmonischen Gruppe mit Hülfe der Eigenschaft des Vierseits, d. h. mit der ausschliesslichen Verwendung des Lineals.

Seit 1832 hat Steiner die Constructionen der projectivischen Gebilde gelehrt *2). Die vollständige Theorie der Doppelverhältnisse verdanken wir Möbius *3), aber schon Euclid, Pappus *4), Desargues *5), Brianchon *6) hatten den Fundamentalsatz (Nr. 54) derselben bewiesen.

Desargues *7) ist der Schöpfer der Involutionstheorie; von welcher einige besondere Fälle schon den griechischen Geometern bekannt waren *8).

Die Erzeugung der Kegelschnitte mit Hülfe projectivischer Gebilde wurde vor vierzig Jahren durch Steiner und Chasles auseinander gesetzt; sie beruht auf zwei Fundamentalsätzen (Nr. 113, 114), aus welchen die ganze Lehre von diesen so wichtigen Curven abgeleitet wird. Dieselbe Erzeugung enthält die organische Beschreibung von Newton *9) und verschiedene Lehrsätze von Maclaurin.

Im Alter von sechzehn Jahren (1640) hat Pascal den berühmten Lehrsatz von dem mystischen Sechseck *10) gefunden, und im Jahr 1806 fand Brianchon den reciproken Satz von dem Sechseck mit Hülfe der Poltheorie (Nr. 117).

---

*) Conicorum, lib. I, 34, 36, 37, 38.

*1) Sectiones conicae (Parisiis, 1685), I, 20.

*2) Loc. cit., S. 91, § 24.

*3) Der barycentrische Calcul (Leipzig, 1827), Cap. V.

*4) Collectiones mathematicae, VII, 129.

*5) Loc. cit., S. 425.

*6) Mémoire sur les lignes du second ordre (Paris, 1817), S. 7.

*7) Loc. cit., S. 119, 147, 171, 176.

*8) Pappus, Collectiones mathematicae, lib. VII, S. 37—56, 127, 128, 130—133.

*9) Loc. cit., Buch I, Lemma 21.

10*) Briefe von Leibnitz an M. Périer in den Werken von B. Pascal (Ausg. Bossut, Bd. V, S. 459).

Die Eigenschaften des von vier Tangenten gebildeten Vierseits und der Vierecke der Berührungspunkte finden sich in dem lateinischen Anhang (De linearum geometricarum proprietatibus tractatus) zu der englischen Ausgabe (London, 1748) der (nach dem Tode publicirten) Algebra von Maclaurin, welcher daraus in mehreren Fällen, wo fünf Elemente (Punkte oder Tangenten) gegeben sind, die Construction eines Kegelschnittes vermittelst Punkte oder Tangenten abgeleitet hatte. Alle möglichen Fälle wurden später von Brianchon aufgelöst.

Der Gedanke, zwei projectivische Punktreihen auf demselben Kegelschnitt zu betrachten, ist in dem Saggio von Bellavitis (S. 270, Anmerk.) ausdrücklich auseinandergesetzt.

Einen berühmten Lehrsatz (Nr. 246) über die Segmente, welche ein Kegelschnitt auf den Seiten eines Dreiecks bestimmt, verdanken wir Carnot *). Gewisse besondere Fälle kannte man schon lange vorher *1).

In der Freien Perspective von Lambert trifft man hübsche Constructionen, um einige Aufgaben des ersten und zweiten Grades mit Hülfe des Lineals zu lösen, wobei jedoch gewisse Elemente als gegeben vorausgesetzt werden; aber die Möglichkeit, alle Aufgaben des zweiten Grades mit Hülfe des Lineals und eines festen Kreises zu lösen, wurde von Poncelet beleuchtet; später hat Steiner in einem köstlichen Büchlein die wirkliche Ausführung gezeigt (Nr. 184).

Die Theorie der Pole und Polaren war schon unter verschiedenen Namen in den angeführten Werken von Desargues *2) und de la Hire *3) enthalten; sie ist von Monge *4), Brianchon *5) und Poncelet ausgebildet worden. Letzterer

---

*) Géométrie de position (Paris, 1803), Nr. 379.

*1) Apollonius, Conicorum, lib. III, S. 16—23. — Desargues, loc. cit., S. 202. — De la Hire, loc. cit., Bd. V, S. 10, 12. — Newton, Enumeratio linearum tertii ordinis (London, 1706), S. 4.

*2) Loc. cit., S. 164, 186, 190 u. folg.

*3) Loc. cit., I, 21—28; II, 23—30.

*4) Géométrie descriptive (Paris, 1795), Nr. 40.

*5) Journal de l'Ecole Polytechnique, cahier XIII (Paris, 1806).

hat daraus die Theorie der reciprok-polaren Figuren gezogen, welche in Wirklichkeit nichts anderes ist als das Dualitätsgesetz, das von ihm Princip der polaren Reciprocität genannt wurde.

Die wichtigsten Eigenschaften der conjugirten Durchmesser endlich sind von Apollonius in den Büchern II und VII seines Werkes „Conicorum“ auseinander gesetzt worden.

Diejenigen, welche eine weitere und genauere Kenntniss von dem Fortschritte der Geometrie von ihren Anfängen bis 1830 (was für den Stoff dieses Buches genügt) erlangen wollen, haben nur das classische Werk Aperçu historique von Chasles zu lesen.

Mailand, November 1872.

Der Verfasser.

Vorwort des Uebersetzers.

Die vorliegende deutsche Ausgabe ist in der Hauptsache eine Uebersetzung des italienischen Originals. Die freundliche Bereitwilligkeit, mit welcher mir Herr Professor Cremona erlaubte, eine deutsche Ausgabe zu veranstalten, erstreckte derselbe jedoch auch dahin, diejenigen Veränderungen anzubringen, welche ihm am dringendsten nothwendig erschienen; sie betreffen die §§ 2 und 3 über „Perspectivische Figuren" und „Collineation" nebst vielen weniger wesentlichen Abänderungen in andern Paragraphen. Ferner sind auf seine Anregung hin zu den wichtigen Sätzen der Nummer 114 die Chasles'schen Beweise durch diejenigen von Herrn Dewulf ersetzt worden.

Das italienische Original ist in erster Linie für die technischen Hochschulen des Königreichs Italien bestimmt; die graphische Methode aber, deren sich der Herr Verfasser in seiner bekannten, meisterhaften Weise bedient, wird dem Werkchen ohne Zweifel auch in deutschen Anstalten Freunde verschaffen.

Winterthur, August 1882.

Fr. R. Trautvetter.

Inhalts-Verzeichniss.

Elemente der projectivischen Geometrie.

§ 1. Definitionen.

1. Eine „Figur“ ist irgend ein Inbegriff von Punkten, Geraden und Ebenen; Gerade und Ebenen sind unbegrenzt zu denken, ohne Rücksicht auf die begrenzten Theile des Raumes, welche von ihnen eingeschlossen werden. Unter dem Namen „Dreieck“ z. B. muss man sich ein System von drei Punkten und drei verbindenden Geraden denken; ein „Tetraeder“ ist ein System von vier Ebenen und vier Punkten, in denen je drei Ebenen sich schneiden etc.

Um eine gleichmässige Benennung zu erzielen, bezeichne ich immer die Punkte durch die grossen Buchstaben A, B, C, . . . die Geraden durch die kleinen Buchstaben a, b, c, . . . die Ebenen durch die griechischen Buchstaben α, β, γ, . . .; ausserdem bezeichnet AB die Strecke, die von den Punkten A und B begrenzt ist; $A a$ bezeichnet die Ebene, welche durch den Punkt A und die Gerade a geht; $a\alpha$ ist der Punkt, in welchem die Gerade a die Ebene α durchdringt; $\alpha\beta$ ist die Gerade, bestimmt durch die Ebenen α und β; ABC ist die Ebene der drei Punkte A, B, C; $\alpha\beta\gamma$ ist der Durchschnittspunkt der drei Ebenen α, β, γ; α . BC ist der Durchschnittspunkt der Ebene α und der Geraden BC; A . $\beta\gamma$ ist die Ebene, welche durch den Punkt A und die Schnittlinie der beiden Ebenen β und γ gelegt wird; αBc ist die Gerade, in welcher sich die Ebene α und die durch den Punkt B und die Gerade c bestimmte Ebene schneiden; A . βc ist die Gerade, welche den Punkt A mit dem Durchschnittspunkt der Ebene β und der Geraden c

verbindet; etc. Mit $\alpha . BC \equiv A'$ wird angezeigt, dass der Punkt, in welchem die Ebene α von der Geraden BC geschnitten wird, mit dem Punkte A' zusammenfällt; $u \equiv ABC$ zeigt an, dass in der Geraden u die drei Punkte A, B, C liegen etc.

2. Von einem festen Punkte S (Projectionsmittelpunkt) eine Figur (ABCD..., $abcd$...), die aus Punkten und Geraden zusammengesetzt ist, projiciren, heisst: die projicirenden Geraden (Strahlen) SA, SB, SC, SD,... und die Ebenen (projicirenden Ebenen) Sa, Sb, Sc, Sd... construiren. Man erhält so eine neue Figur, die aus Geraden und Ebenen zusammengesetzt ist, welche durch den Mittelpunkt S gehen.

3. Eine aus Ebenen ($\alpha\beta\gamma\delta$...) und Geraden ($abcd$ ..) zusammengesetzte Figur durch eine feste Ebene σ (Transversalebene) schneiden, heisst: die Geraden oder Spuren $\sigma\alpha$, $\sigma\beta$, $\sigma\gamma$,... und die Punkte oder Spuren σa, σb, σc,... construiren. Aus dieser Construction ergibt sich eine neue Figur, die aus Geraden und Punkten zusammengesetzt ist, welche in der Ebene σ liegen.

4. Eine aus Punkten zusammengesetzte Figur ABCD... aus einer festen Geraden s (Axe) projiciren, heisst: Die Ebenen sA, sB, sC... construiren. Die neue Figur ist also aus Ebenen zusammengesetzt, die alle durch die Axe s gehen.

5. Eine aus Ebenen zusammengesetzte Figur $\alpha\beta\gamma\delta$... durch eine feste Gerade s (Transversale) schneiden, heisst: die Punkte $s\alpha$, $s\beta$, $s\gamma$, $s\delta$... construiren. Die neue Figur ist also aus Punkten zusammengesetzt, die alle auf einer festen Transversalen s liegen.

6. Ist eine Figur aus den Geraden a, b, c... zusammengesetzt, die alle durch einen festen Punkt oder Mittelpunkt S gehen, so kann man sie aus einer Geraden oder Axe s projiciren, die durch S geht; daraus folgt eine Figur, die aus den Ebenen sa, sb, sc... zusammengesetzt ist.

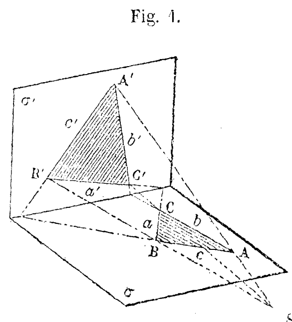
7. Ist eine Figur aus Geraden a, b, c... zusammengesetzt, die alle in einer festen Ebene liegen, so kann man sie durch eine Gerade (Transversale) s schneiden, die in derselben

Ebene liegt; die Figur, welche daraus hervorgeht, ist aus den Punkten sa, sb, sc... zusammengesetzt *).

§ 2. **Perspectivische Figuren.**

8. Betrachte man eine aus Punkten A, B, C,... und Geraden AB, AC,.., BC,... einer Ebene σ bestehende Figur. Man projicire diese aus einem nicht in σ liegenden Mittelpunkt S, und schneide die Strahlen SA, SB, SC,... und die Ebenen SAB, SAC,.., SBC,... durch eine Transversalebene σ' (Fig. 1). Dann bilden die Spuren der projici-

Fig. 1.



renden Strahlen und Ebenen auf σ' eine zweite, mit der ersten gleichartige Figur. Beide Operationen, durch welche die zweite Figur aus der ersten abgeleitet wird, ausführen, heisst: aus einem Mittelpunkte S eine gegebene ebene Figur σ auf eine Bildebene σ' projiciren. Die neue Figur σ' heisst perspectivisches Bild oder Projection der ursprünglichen. Selbstverständlich: projicirt man aus S die zweite Figur σ' auf σ, so wird die erste wieder entstehen: d. h. die erste Figur ist die Projection der zweiten aus dem Mittelpunkte S auf der Bildebene σ. Die zwei ebenen Figuren σ, σ' heissen perspectivisch.

a) Sind A′, B′, C′,... die Spuren der Strahlen SA, SB, SC,... auf σ', so kann man sagen, dass den Punkten A, B,

*) Projiciren und Schneiden sind die beiden Fundamentaloperationen der projectivischen Geometrie.

C, . . . der ersten Figur die Punkte A′, B′, C′, . . . der zweiten entsprechen, unter der Bedingung, dass zwei entsprechende Punkte immer mit dem Mittelpunkte S in gerader Linie liegen. Beschreibt der Punkt A eine Gerade a in σ, so beschreibt der Strahl SA eine Ebene Sa; ebenso durchläuft A′ eine Gerade a', den Durchschnitt der Ebenen Sa und σ'. Die Geraden a und a', in welchen die Ebenen σ und σ' von einer und derselben projicirenden Ebene durchschnitten werden, können also entsprechende Geraden genannt werden. Daraus folgt, dass den Geraden AB, AC, . . . BC, . . . die Geraden A′B′, A′C′, . ., B′C′, . . . entsprechen, und dass den durch einen Punkt A von σ laufenden Geraden solche Geraden entsprechen, welche den entsprechenden Punkt A′ enthalten.

b) Durchläuft der Punkt A eine krumme Linie in σ, so wird der entsprechende Punkt A′ eine andere, der ersten entsprechende, krumme Linie in σ' beschreiben. Tangenten der zwei Curven in entsprechenden Punkten sind entsprechende Geraden. Entsprechende Geraden schneiden die zwei Curven in entsprechenden Punkten. Zwei entsprechende Curven sind also von derselben Ordnung *).

c) Die zwei Figuren können ebenso gut durch die gleichzeitige Bewegung entsprechender Geraden a, a' erzeugt werden. Dreht sich a um einen festen Punkt A, so wird auch a' stets durch den entsprechenden Punkt A′ gehen.

Umhüllt a eine Curve, so wird a' analogerweise die entsprechende Curve berühren. Entsprechende Lagen von a und a' berühren die zwei Curven in entsprechenden Punkten. Den aus einem Punkte A kommenden Tangenten der ersten Curve entsprechen Tangenten der zweiten, welche durch den entsprechenden Punkt A′ gehen. Zwei entsprechende Curven sind also von derselben Classe *1).

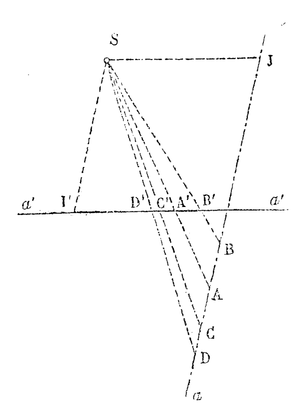
9. Betrachten wir zwei entsprechende Geraden a, a' der perspectivischen Figuren σ, σ'. Jeder in ihrer Ebene durch

*) Ordnung einer Curve ist die höchste Zahl der Punkte, worin sie durch eine willkürliche Ebene geschnitten werden kann.

*1) Classe einer ebenen Curve ist die höchste Zahl ihrer Tangenten, welche in einem willkürlichen Punkt zusammenlaufen können.

S gelegte Strahl trifft a und a' in zwei entprechenden Punkten wie A und A' (Fig. 2). Dreht sich der Strahl um den Punkt S, so verändern sich gleichzeitig A und A'; wird der Strahl nahezu parallel a, so nähert sich der Punkt A' dem Punkte I' (gemeinsamer Punkt für a' und die Gerade durch S parallel a) und der Punkt A entfernt sich unaufhörlich. Damit die Eigenschaft, dass einem Punkte von a' immer auch ein Punkt von a entspricht, fortbestehe, sagen wir, es habe die Gerade a im Unendlichen einen Punkt I, mit welchem der Punkt A zu-

Fig. 2.



sammenfällt, wenn A' mit I' zusammenfällt, d. h. wenn der um S bewegliche Strahl mit a parallel wird. Die Gerade a hat einen einzigen Punkt im Unendlichen, vorausgesetzt dass durch S ein einziger Strahl parallel zu a geht*).

Der Punkt I', das Bild des unendlich fernen Punktes I heisst Fluchtpunkt oder Grenzpunkt. Ebenso hat die Gerade a' im Unendlichen einen Punkt J', welcher dem Punkt J entspricht, wo a von der Parallelen zu a' geschnitten wird.

Zwei parallele Geraden haben denselben Punkt im Unendlichen. Alle Parallelen zu derselben Geraden müssen so angesehen werden, als haben sie im Unendlichen einen gemeinsamen Punkt. Zwei Geraden, die in derselben Ebene

*) Grundhypothese der euklidischen Geometrie.

liegen, haben immer einen gemeinsamen Punkt (in endlicher oder unendlicher Ferne).

10. Wenn nun die Gerade a alle möglichen Lagen in der Ebene σ annimmt, so wird die entsprechende Gerade a' immer der Durchschnitt der Ebenen σ' und Sa sein. Indem sich a bewegt, erzeugt der Strahl S I (parallel a) eine Ebene π, welche σ parallel ist und der Punkt I' beschreibt die Gerade $\pi\sigma'$, welche wir i' heissen wollen. Die Gerade i' ist also der Art, dass einem beliebigen ihrer Punkte ein unendlich ferner Punkt der Ebene σ entspricht und der auch der Ebene π angehört.

Wir wollen annehmen, dass der geometrische Ort dieser unendlich fernen Punkte (der Ebene σ) eine Gerade i ist, weil sie der Geraden i' der Ebene σ' entspricht und als Durchschnitt der Ebenen π und σ angesehen werden kann; so gilt allgemein, ohne Ausnahme, das Gesetz, dass jeder Geraden der Ebene σ' eine Gerade der Ebene σ entspricht.

Die Ebene σ hat eine einzige unendlich ferne Gerade, weil durch den Punkt S eine einzige Ebene geht, die parallel σ ist. Die Gerade i', das Bild der unendlich fernen Geraden (i), heisst die „Fluchtlinie“ oder „Grenzlinie“. Sie ist parallel zu $\sigma\sigma'$.

Ebenso hat die Ebene σ' eine unendlich ferne Gerade, welche dem Durchschnitt der Ebene σ mit der Ebene π' entspricht, die durch S parallel mit σ' gelegt wird. Zwei parallele Ebenen haben dieselbe Gerade in unendlicher Ferne gemein. Alle Ebenen, die derselben Ebene parallel gehen, müssen so angesehen werden, als gehen sie durch eine feste unendlich ferne Gerade.

Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so geht die unendlich ferne Gerade der Ebene durch den unendlich fernen Punkt der Geraden. Sind zwei Geraden parallel, so treffen sie denselben Punkt der unendlich fernen Geraden der Ebene, welche durch sie bestimmt ist.

Zwei Ebenen schneiden sich immer in einer Geraden (in endlicher oder unendlicher Ferne).

Eine Gerade und eine Ebene (die nicht durch jene geht) treffen sich immer in einem Punkte (in endlicher oder unendlicher Ferne).

Drei Ebenen, die nicht durch dieselbe Gerade gehen, haben immer einen gemeinsamen Punkt (in endlicher oder unendlicher Ferne).

11. **Lehrsatz.** Sind zwei ebene Figuren ABC,... A′B′C′... (Fig. 1), die in verschiedenen Ebenen σ und σ' liegen, perspectivisch, d. h. convergiren die Strahlen AA′, BB′, CC′... in einem Punkte S, so schneiden sich die entsprechenden Geraden AB und A′B′, AC und A′C′... BC und B′C′... in Punkten, die auf derselben Geraden, nämlich der Durchschnittslinie der beiden Ebenen σ und σ' liegen.

Ist M ein Punkt der Geraden $\sigma\sigma'$ und geht eine Gerade a der Ebene σ durch M, so wird auch die entsprechende Gerade a' durch M gehen; in der That sind die beiden Geraden a und a' die Durchschnittslinien derselben projicirenden Ebene mit den beiden Ebenen σ und σ'; die drei Geraden $\sigma\sigma'$, a und a' convergiren also in einem Punkte, der den drei Ebenen gemeinsam ist.

Die Gerade $\sigma\sigma'$ ist der Ort der Punkte, die sich selbst entsprechen.

Die Grenzgerade i' auf der Ebene σ' ist der Geraden $\sigma\sigma'$ parallel, denn i' und die entsprechende Gerade i, welche ganz in unendlicher Ferne auf σ liegt, müssen sich auf $\sigma\sigma'$ schneiden.

Ebenso ist die Grenzgerade j der Ebene σ parallel mit $\sigma\sigma'$.

Ist jede Figur ein Dreieck, so lautet der Satz, wie folgt:

Liegen zwei Dreiecke ABC und A′B′C′ in zwei Ebenen σ und σ', so dass die Geraden AA′, BB′, CC′ durch einen gemeinschaftlichen Punkt S gehen, so schneiden sich je zwei entsprechende Seiten BC und B′C′, CA und C′A′, AB und A′B′ in Punkten der Geraden $\sigma\sigma'$.

12. **Lehrsatz.** Umgekehrt, wenn den Punkten A, B, C... und den Geraden AB, AC, BC... einer ebenen

Figur σ, in derselben Aufeinanderfolge, die Punkte A', B', C' ... und die Geraden A'B', A'C' ... B'C' ... einer andern Figur σ' *) in der Weise entsprechen, dass sich die entsprechenden Geraden AB und A'B', AC und A'C' ... BC und B'C' ... auf Punkten der Durchschnittslinie beider Ebenen σ und σ' $(\sigma\sigma')$ schneiden, so sind die beiden Figuren perspectivisch. In der That, sei S der den drei Ebenen AB . A'B', AC . A'C', BC . B'C' gemeinsame Punkt, so convergiren die drei Kanten AA', BB', CC' des von denselben Ebenen gebildeten Dreikants in S. Ebenso schneiden sich die drei Ebenen AB . A'B', AD . A'D', BD . B'D' in einem Punkte, welcher den Kanten AA', BB', DD' gemeinsam ist und dieser Punkt ist wieder S, da die zwei Geraden AA', BB' genügen, um ihn zu bestimmen. Es gehen also alle die Geraden AA', BB', CC', DD' ... durch denselben Punkt S; oder die beiden gedachten Figuren sind perspectivisch und S ist ihr Projectionsmittelpunkt (Centrum).

Ist jede Figur ein Dreieck, so hat man den Satz:

Liegen zwei Dreiecke ABC und A'B'C' in zwei Ebenen σ und σ', so dass sich je zwei Seiten BC und B'C', CA und C'A', AB und A'B' in Punkten einer Geraden $(\sigma\sigma')$ schneiden, so gehen die Geraden AA', BB', CC' durch einen gemeinsamen Punkt S.

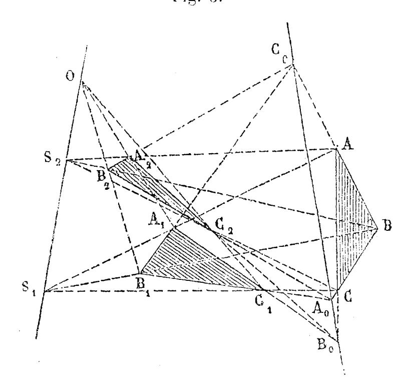
13. **Lehrsatz.** Wenn zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ in einerlei Ebene σ liegen und die drei Geraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sich in einem und demselben Punkte O schneiden, so liegen die drei Punkte, in welchen je zwei Seiten B_1C_1 und B_2C_2, C_1A_1 und C_2A_2, A_1B_1 und A_2B_2 sich schneiden, in derselben Geraden.

Durch den Punkt O, der den Geraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 gemeinsam ist, legen wir ausserhalb der Ebene σ irgend eine Gerade, auf welcher wir zwei Punkte S_1 und S_2 nehmen. Projiciren wir das Dreieck $A_1B_1C_1$ von S_1 aus, und das Dreieck

*) Die Ebenen σ und σ' sind als verschiedene anzusehen.

$A_2 B_2 C_2$ von S_2 aus. Die Punkte A_1, A_2, O, S_2, S_1 liegen in derselben Ebene, also schneiden sich $S_1 A_1$ und $S_2 A_2$ (in A), ebenso $S_1 B_1$ und $S_2 B_2$ (in B), ebenso $S_1 C_1$ und $S_2 C_2$ (in C). So ist das Dreieck ABC perspectivisch zu $A_1 B_1 C_1$ und zu $A_2 B_2 C_2$. Die Geraden BC, $B_1 C_1$, $B_2 C_2$ schneiden sich paarweise und laufen darum in einem Punkte A_0 zusammen *).

Fig. 3.



Ebenso laufen CA, $C_1 A_1$ und $A_2 C_2$ in einem Punkte B_0 zusammen, und AB, $B_1 A_1$, $A_2 B_2$ in C_0. Die drei Punkte A_0, B_0, C_0 liegen auf der Geraden, die den beiden Ebenen σ und ABC gemeinsam ist. Der Lehrsatz ist also bewiesen.

14. **Lehrsatz.** Wenn zwei Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ in einerlei Ebene σ liegen und die Eigenschaft haben, dass sich die Seiten $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$, $C_1 A_1$ und $C_2 A_2$, $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ paarweise in drei Punkten A_0, B_0, C_0 einer Geraden schneiden, so laufen die verbindenden Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ der Eckpunkte durch einen und denselben Punkt O.

Legen wir durch die Gerade $A_0 B_0 C_0$ eine andere Ebene und projiciren darauf von einem beliebigen Centrum S_1 aus

*) BC ist der Durchschnitt der Ebenen $S_1 B_1 C_1$ und $S_2 B_2 C_2$, die nicht zusammenfallen, d. h. die Geraden BC, $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ liegen nicht alle drei in einer Ebene. Die drei Ebenen $BC . B_1 C_1$, $BC . B_2 C_2$ und $B_1 C_1 . B_2 C_2$ (oder σ) schneiden sich in einem Punkte A_0.

das Dreieck $A_1 B_1 C_1$. Wenn die Projection ABC ist, so schneiden sich die Geraden BC, $B_1 C_1$ in dem Punkte A_0, durch welchen auch $B_2 C_2$ geht; ebenso wird AC durch B_0 und AB durch C_0 gehen. Die Geraden AA_2, BB_2, CC_2 schneiden sich paarweise, ohne dass sie übrigens alle drei in einer Ebene liegen; sie convergiren also in einem Punkte S_2. Die Geraden $S_1 S_2$, $A_1 A_2$ liegen in derselben Ebene, weil sich $S_1 A_1$ und $S_2 A_2$ in A schneiden, also schneidet $S_1 S_2$ die drei Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, d. h. diese drei Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ treffen in einem Punkte O zusammen, welcher der Ebene σ und der Geraden $S_1 S_2$ gemeinsam ist*).

§ 3. **Collineation.**

15. Es sind gegeben: eine Ebene σ und eine andere Ebene σ', die eine beliebige aus Punkten und Geraden bestehende Figur enthält. Ausserhalb der gegebenen Ebenen nehme man zwei Punkte S_1 und S_2 an und projicire aus jedem derselben, als Mittelpunkte betrachtet, die Figur σ' auf die Ebene σ. So entstehen in σ zwei neue Figuren, man heisse sie σ_1 und σ_2, welche die Projectionen einer und derselben Figur σ' auf einer und derselben Ebene σ, aber aus verschiedenen Mittelpunkten, sind. Bezeichnen wir als entsprechende zwei Punkte A_1 und A_2 oder zwei Geraden a_1 und a_2 der Figuren σ_1 und σ_2, wenn sie die Bilder eines und desselben Punktes A' oder einer und derselben Geraden a' der Figur σ' sind. Dann hat man zwei Figuren σ_1 und σ_2, in einerlei Ebene σ gelegen, und so beschaffen, dass den Punkten A_1, B_1, $C_1, \ldots$ und den Geraden $A_1 B_1$, $A_1 C_1, \ldots$ $B_1 C_1, \ldots$ der einen die Punkte A_2, B_2, $C_2, \ldots$ und die Geraden $A_2 B_2$, $A_2 C_2, \ldots$ $B_2 C_2, \ldots$ der andern entsprechen. Da zwei entsprechende Geraden von σ' und σ_1 in einem Punkte der Geraden $\sigma\sigma'$, und auch zwei entsprechende Geraden von σ', und σ_2 in einem Punkte derselben Geraden $\sigma\sigma'$ sich schneiden, so folgt daraus, dass drei entsprechende Geraden von

*) Baltzer, Stereometrie S. 74—76. Die Sätze Nr. 11 und 12 rühren von Desargues her.

σ', σ_1 und σ_2 sich in einem und demselben Punkte schneiden, welcher als Schnittpunkt der Geraden von σ' mit der Geraden $\sigma \sigma'$ bestimmt ist. Das heisst: zwei entsprechende Geraden der Figuren σ_1 und σ_2 schneiden sich immer auf einer festen Geraden, der Spur von σ' auf σ. Wenn ausserdem A_1 und A_2 zwei entsprechende Punkte von σ_1 und σ_2 sind, so haben die Strahlen $S_1 A_1$, $S_2 A_2$ einen Punkt A' gemein, also liegen sie in einer und derselben Ebene: folglich schneiden sich $A_1 A_2$, $S_1 S_2$ in einem Punkte O. So hat man also die Eigenschaft, dass jede Gerade, wie $A_1 A_2$, welche zwei entsprechende Punkte der Figuren σ_1 und σ_2 verbindet, durch einen festen Punkt O geht, welcher die Spur von $S_1 S_2$ auf σ ist. Daraus schliessen wir: wenn zwei Figuren σ_1 und σ_2 die Projectionen einer und derselben Figur auf einer und derselben Ebene aus verschiedenen Mittelpunkten sind, so haben diese Figuren alle Eigenschaften der perspectivischen Gebilde (8), obschon sie in einerlei Ebene liegen. Den Punkten und Geraden der ersten entsprechen eindeutig die Punkte und Geraden der zweiten Figur; zwei entsprechende Punkte liegen immer in einem Strahle, der durch einen festen Punkt O geht; zwei entsprechende Geraden schneiden sich immer auf einer festen Geraden *s*.

Solche Figuren heissen collinear oder homologisch oder auch perspectivisch; O das Collineations- oder Projectionscentrum; *s* die Collineations- oder Projectionsaxe *).

16. **Lehrsatz.** Es seien in einer Ebene σ zwei Figuren σ_1 und σ_2 gegeben, so dass den Punkten A_1, B_1, $C_1, \ldots$ und den Geraden $A_1 B_1$, $A_1 C_1, \ldots$ $B_1 C_1, \ldots$ der einen die Punkte A_2, B_2, $C_2, \ldots$ und die Geraden $A_2 B_2$, $A_2 C_2, \ldots$ $B_2 C_2, \ldots$ der andern eindeutig entsprechen. Wenn die Durchschnitte der entsprechenden Geraden in einer festen Geraden *s* liegen, so gehen die geraden Verbindungslinien der entsprechenden Punkte durch einen festen Punkt *o*.

*) Staudt, Geometrie der Lage, 89 und anderswo.

Beweis: Seien A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2 drei Paare entsprechender Punkte; sie bilden zwei Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$, deren Seitenpaare $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$, $C_1 A_1$ und $C_2 A_2$, $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ sich in drei Punkten einer geraden Linie schneiden. In Folge von Nr. 14 laufen die Strahlen $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ in demselben Punkt O zusammen; aber es genügen zwei Strahlen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$, um diesen Punkt zu bestimmen; auf welche Art man immer das dritte Paar der Punkte $C_1 C_2$ wählen möge, der Strahl $C_1 C_2$ wird immer durch O gehen.

Die Figuren σ_1, σ_2 sind also collinear; O ist das Centrum, s die Axe der Collineation.

17. **Lehrsatz:** Wenn den Geraden a, b, c... und den Punkten ab, ac,... bc... einer Figur, in derselben Aufeinanderfolge die Geraden a', b', c',... und die Punkte $a'b'$, $a'c'$,... $b'c'$ einer andern Figur entsprechen, die in derselben Ebene liegt, wie die erste Figur, so dass die Paare der entsprechenden Punkte ab, $a'b'$, ac, $a'c'$, bc, $b'c'$... mit einem festen Punkte O in gerader Linie liegen, so schneiden sich die entsprechenden Geraden a und a', b und b', c und c'... in Punkten, die alle auf **einer** Geraden liegen.

Beweis. Seien in der That a und a', b und b', c und c' drei Paare entsprechender Geraden; da nach Voraussetzung die Geraden, welche die entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke abc, $a'b'c'$ verbinden, in demselben Punkte O zusammenlaufen, so folgt aus Nr. 13, dass die entsprechenden Seiten a und a', b und b', c und c' sich in drei Punkten einer geraden Linie schneiden; aber es genügen zwei Punkte aa', bb', um diese Gerade zu bestimmen; sie bleibt also dieselbe, wenn man statt c und c' irgend zwei andere entsprechende Geraden betrachtet. Zwei entsprechende Geraden schneiden sich also immer auf einer festen Geraden, welche wir mit s bezeichnen wollen; folglich sind die gegebenen Figuren collinear; O ist das Centrum, s die Axe der Collineation.

18. Es seien in einer Ebene σ zwei collineare Figuren σ_1 und σ_2 gegeben: O das Centrum, s die Axe der Collineation. Durch den Punkt O und ausserhalb der Ebene σ ziehe man eine sonst beliebige Gerade, und auf ihr nehme man einen Punkt S_1, aus welchem, als Projectionscentrum, die Figur σ_1 auf eine neue, durch s willkürlich gelegte Ebene σ' projicirt werden soll. So erhält man in σ' eine Figur $A' B' C', \ldots$ welche zu der gegebenen $\sigma_1 \equiv A_1 B_1 C_1 \ldots$ perspectivisch ist. Betrachtet man zwei Punkte A' und A_2 der Figuren σ' und σ_2, welche einem und demselben Punkt A_1 von σ_1 zugeordnet sind, als entsprechend, so sind die Punkte und Geraden von σ' auf die Punkte und Geraden von σ_2 eindeutig bezogen, und schneiden sich je zwei entsprechende Geraden, wie $A' B'$, $A_2 B_2$, auf einer festen Geraden $\sigma \sigma'$ oder s. Folglich sind (Nr. 12) die Figuren σ' und σ_2 perspectivisch und gehen die Strahlen $A' A_2$, $B' B_2, \ldots$ durch einen festen Punkt S_2. Ueberdies schneidet jeder Strahl $A' A_2$ die Gerade $O S_1$, denn die Punkte A', A_2 liegen in den Seiten $S_1 A_1$, $O A_1$ des Dreiecks $O A_1 S_1$. Die Strahlen $A' A_2$, $B' B_2$ liegen nicht alle in derselben Ebene, weil die Punkte $A_2, B_2, \ldots$ willkürlich in der Ebene σ zerstreut sind; der Punkt S_2 gehört also der Geraden $O S_1$ an.

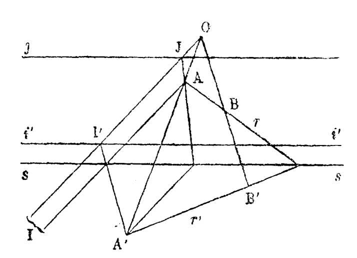
Hieraus schliesst man, dass zwei collineare Figuren auf unendlich viele Arten als Projectionen einer und derselben (in einer durch die Collineationsaxe gehenden Ebene liegenden) Figur, aus zwei verschiedenen, geradlinig mit dem Collineationscentrum verbundenen, Punkten angesehen werden können.

19. Uebung. Gegeben das Centrum O und die Axe s der Collineation und zwei entsprechende Punkte A und A' (mit O in derselben Geraden), die Figur zu construiren, die einer gegebenen Figur collinear ist.

Nehmen wir einen zweiten Punkt B der gegebenen Figur (Fig. 4). Um den entsprechenden Punkt B' zu erhalten, ist zu beachten, dass der Strahl $B B'$ durch O gehen muss, und dass sich die entsprechenden Geraden $A B$ und $A' B'$ (der einen und der andern Figur) auf der Axe s schnei-

den müssen; B′ ist also der Schnittpunkt von O B und der Geraden, welche A′ mit dem Schnittpunkt von A B und s verbindet *). Auf dieselbe Weise kann man eine beliebige Anzahl von Paaren entsprechender Punkte construiren; um die Gerade r' zu zeichnen, die einer gegebenen Geraden r entspricht, genügt es, den Punkt B′ zu finden, der einem Punkte B der Geraden r entspricht und die Punkte B′ und $r\,s$ zu verbinden.

Fig 4.



Um den Punkt I′ zu finden (Fluchtpunkt), der dem unendlich fernen Punkt I ~~(Verschwindungspunkt)~~ einer gegebenen Geraden (eines von O ausgehenden Strahles O I z. B.) entspricht, wiederholt man die oben gegebene Construction des Punktes B′; d. h. man verbindet einen andern Punkt A der ersten Figur mit dem unendlich fernen Punkt I von O I (zieht also A I || O I), verbindet A′ mit dem Schnittpunkt von A I und s, verlängert bis O I, so ist der Schnittpunkt der gesuchte Punkt I′.

Alle Punkte, die I′ analog sind (und den unendlich fernen Punkten der gegebenen ersten Figur entsprechen), fallen auf eine Gerade i', die parallel s ist; i' ist die Fluchtlinie der zweiten Figur. Vertauscht man in der vorhergehenden Construction die Punkte A und A′ *1), so erhält man einen Punkt J (Fluchtpunkt) der Fluchtlinie j der ersten Figur.

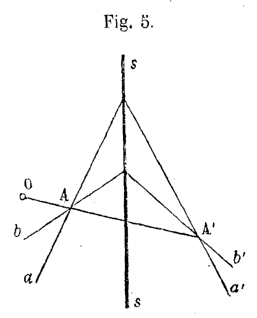
---

*) Diese Construction zeigt, dass, wenn B auf s fällt, B′ mit B coincidirt, d. h. dass jeder Punkt von s sich selbst entspricht.

*1) Oder: Lege durch A′ eine beliebige Gerade J′ A′, dann eine Gerade J A durch A und den Schnittpunkt von J′ A′ mit s, durch O eine Gerade O J′ || A′ J′, der Schnittpunkt von O J′ und J A ist der Fluchtpunkt J, und durch J eine Gerade j parallel s ist die Fluchtlinie der ersten Figur.

Setzen wir voraus, man habe statt der zwei entsprechenden Punkte A, A′ (Fig. 5.) zwei entsprechende Geraden a, a', die sich

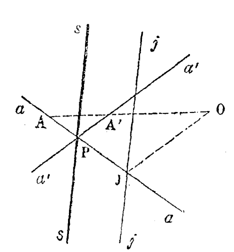
Fig. 5.



auf s schneiden. Jeder durch O gelegte Strahl schneidet sie in zwei entsprechenden Punkten A, A′. Um die Gerade b' zu erhalten, welche der Geraden b der ersten Figur entspricht, genügt es, den Schnittpunkt $b\,s$ mit dem Schnittpunkt von a' und dem durch O und $a\,b$ gehenden Strahl zu verbinden *).

Es können auch das Centrum O, die Axe s und die Fluchtlinie j der ersten Figur gegeben sein (Fig. 6). Schneidet dann eine Gerade a der ersten Figur die Fluchtlinie j in J und die

Fig. 6.



Axe s in P, so liegt der entsprechende Punkt J′ in gleicher Linie mit J und O in unendlicher Ferne von O, aber auch auf der entsprechenden Geraden a', die ebenfalls durch P gehen muss, also ist $a' \parallel$ O J.

Um den Punkt A′ zu finden, der einem gegebenen A entspricht, muss man die Gerade a' zeichnen, welche der beliebig

*) Es folgt daraus, dass a' mit a coincidirt, wenn a durch O geht, d. h. jede durch O gehende Gerade entspricht sich selbst.

durch A gezogenen Geraden a entspricht. Dann ist der Durchschnitt von a' mit O A der gesuchte Punkt A'.

Die Construction der collinearen Figuren vorausgesetzt, seien O das Centrum, s die Axe der Collineation und j die Fluchtlinie der ersten Figur.

In der ersten Figur sei ein Kreis C gegeben (Fig 7, 8, 9); diesem Kreise entspricht in der zweiten Figur eine Curve C', welche wir construiren können, indem wir durch obige Methode die Punkte und Geraden bestimmen, die den Punkten und Tangenten von C entsprechen.

Zwei entsprechende Punkte M, M' der beiden Curven werden immer mit O in derselben Geraden liegen, und zwei entsprechende Sehnen (d. h. die Geraden M N, M' N', welche zwei Paare entsprechender Punkte verbinden) schneiden sich immer auf s; als speciellen Fall*), werden zwei entsprechende Tangenten m, m' (das sind Tangenten in zwei entsprechenden Punkten M, M') in einem Punkte von s zusammenlaufen.

Es folgt aus der Construction, dass die Curve C', übereinstimmend mit dem Kreise, die zwei folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Jede Gerade in ihrer Ebene schneidet sie in zwei Punkten, oder ist eine Tangente, oder hat keinen Punkt mit ihr gemein;

2. durch einen beliebigen Punkt ihrer Ebene kann man zwei Tangenten an die Curve ziehen, oder eine einzige (wenn der Punkt auf der Curve ist) oder gar keine.

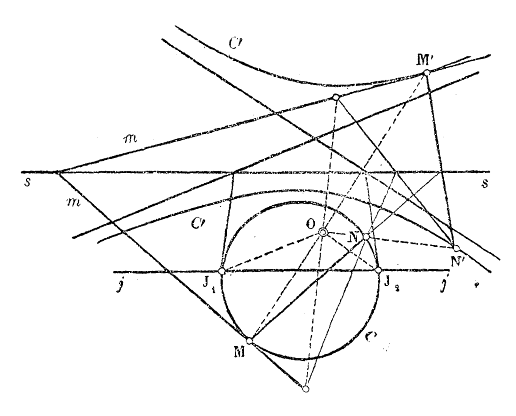
Da nach Nr. 17 zwei collineare Figuren so angesehen werden können, als seien sie durch das Zusammenlegen zweier perspectivischer Ebenen entstanden, so ist die Curve C' nichts anderes als irgend ein ebener Schnitt eines schiefen Kegels mit kreisrunder Basis. Dieser Kegel (Kegelfläche) wird durch die Geraden gebildet, die von irgend einem Punkte (O) des Raumes aus die Punkte eines Kreises projiciren. Darum heisst die Curve C' ein Kegelschnitt; die collineare Figur eines Kreises ist ein Kegelschnitt.

---

*) Die Tangente in M wird als die Gerade angesehen, welche durch M und den unendlich naheliegenden Punkt der Curve geht. Baltzer, Planimetrie S. ~~11~~ 23.

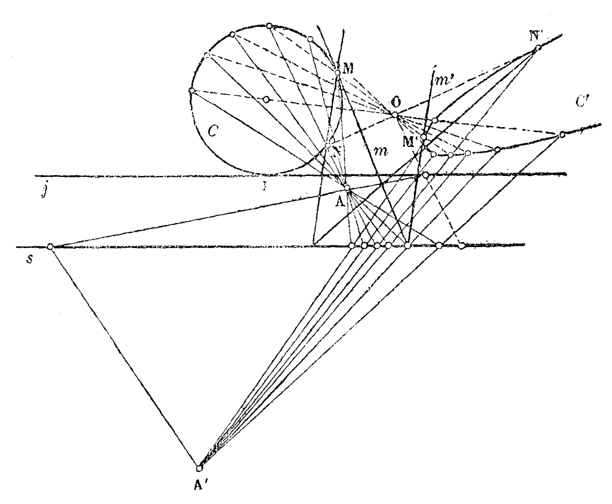
Die Punkte der Fluchtlinie j entsprechen den unendlich fernen Punkten der zweiten Figur. Nun kann der Kreis C die Linie j

Fig. 7.



in zwei Punkten $J_1\,J_2$ schneiden (Fig. 7) oder j in einem Punkte J berühren (Fig. 8) oder keinen Punkt mit j gemein haben (Fig. 9).

Fig. 8.



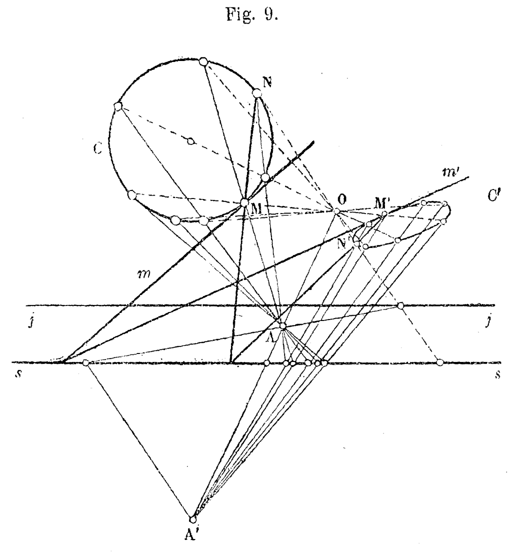
Im ersten dieser Fälle (Fig. 7) wird die Curve C′ zwei Punkte J'_1, J'_2 in unendlicher Ferne in der Richtung der Geraden $O\,J_1$, $O\,J_2$ haben. Den beiden Geraden, welche den Kreis

in J_1 und J_2 berühren, werden zwei Geraden (respective parallel mit $O J_1$ und $O J_2$) entsprechen, welche so angesehen werden können, dass sie die Curve C′ in den unendlich fernen Punkten J'_1 und J'_2 als Tangenten berühren. Diese beiden Tangenten, deren Berührungspunkte in unendlicher Ferne liegen, heissen Asymptoten der Curve C′, die selbst Hyperbel heisst.

Im zweiten Fall (Fig. 8) hat C′ einen einzigen Punkt J′ im Unendlichen; er muss als Berührungspunkt der Curve mit der unendlich fernen Geraden j' angesehen werden, welche der Tangente j im Punkt J an den Kreis C entspricht. Diese Curve C′ heisst Parabel.

Im dritten Fall (Fig. 9) hat die Curve C′ keinen unendlich fernen Punkt und heisst Ellipse. Man zeigt auf dieselbe

Fig. 9.

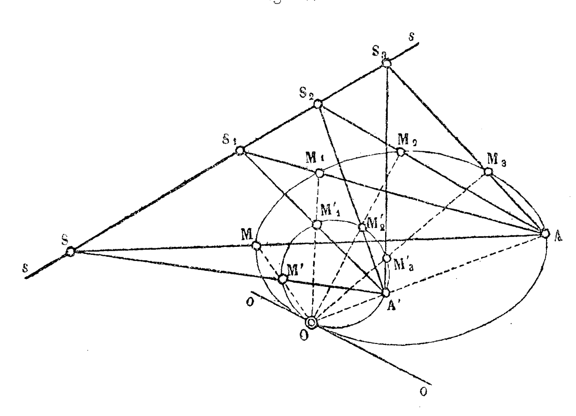


Art, dass wenn in der ersten Figur ein Kegelschnitt C gegeben ist, die correspondirende Curve C′ in der zweiten Figur ebenfalls ein Kegelschnitt sein wird.

Das Collineationscentrum ist ein Punkt, der sich selbst entspricht und jeder Strahl, der durch dasselbe geht, entspricht sich selbst. Geht also eine Curve C durch O (Fig. 10), so geht die entsprechende Curve C′ ebenfalls durch O und die beiden Curven haben in diesem Punkte eine gemeinsame Tangente. In Fig. 10

ist ausserdem die Collineationsaxe s und der dem Punkte A′ des Kreises entsprechende Punkt A als gegeben vorausgesetzt.

Fig. 10.



Ebenso ist jeder Punkt der Collineationsaxe sich selbst entsprechend; wenn also eine Curve der ersten Figur die Gerade s in einem Punkte berührt, so berührt auch die entsprechende Curve der zweiten Figur die Gerade s in demselben Punkte. In Fig. 10′ geben wir uns einen Kreis, der vermittelst seiner Tangenten collinear umzuwandeln ist, setzen ausserdem voraus, die Collineationsaxe s berühre den Kreis und das Collineationscentrum O sei ein beliebiger Punkt und geben uns die Gerade a der zweiten Figur, die der Tangente a' des Kreises entspricht.

Beachten wir zwei Specialfälle:

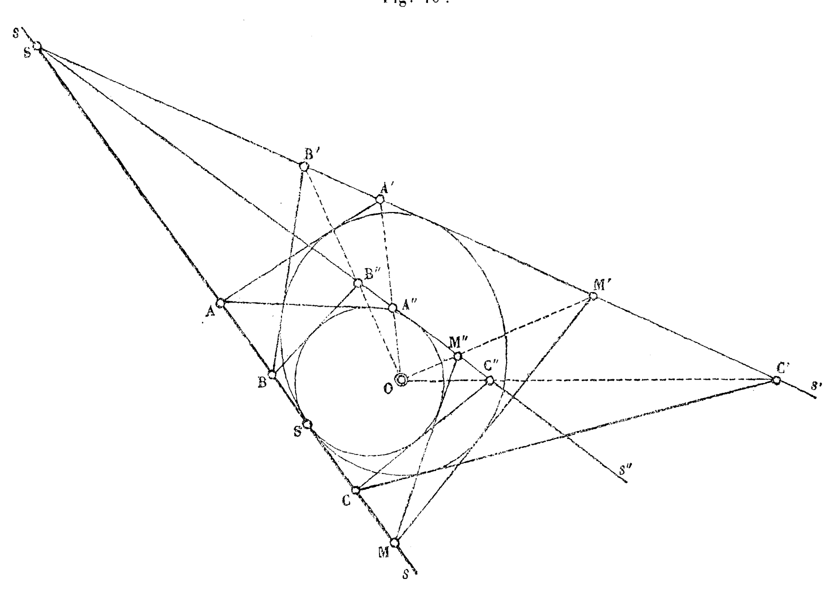
1. Die Collineationsaxe s kann ganz im Unendlichen liegen; dann sind zwei entsprechende Geraden immer parallel, oder, was dasselbe ist, zwei entsprechende Winkel sind immer gleich. In diesem Falle sagt man, dass die beiden Figuren ähnlich und ähnlich liegend oder homothetisch *) sind, und dass der Punkt O der Aehnlichkeitspunkt ist. In zwei homothetischen Figuren entspricht immer ein Kreis einem Kreise.

---

*) Homothetische Figuren können als Schnittfiguren paralleler Ebenen und einer Pyramide oder eines Kegels angesehen werden; s, die Durchschnittslinie der beiden Ebenen, liegt unendlich fern.

2. Der Punkt O, im Gegentheil, kann unendlich ferne liegen; alsdann sind die Geraden (Projectionsstrahlen), welche Paare

Fig. 10'.



entsprechender Punkte verbinden, parallel einer festen Richtung. In diesem Falle sind die Figuren affin-collinear *) und die Gerade s ist die Affinitätsaxe *[1]). Einem unendlich fernen Punkte entspricht ein unendlich ferner Punkt und die unendlich ferne Gerade entspricht sich selbst. Daraus folgt, dass einer Ellipse eine Ellipse, einer Hyperbel eine Hyperbel, einer Parabel eine Parabel, einem Parallelogramm ein Parallelogramm entspricht.

§ 4. Collineare Figuren im Raume.

20. Setzen wir jetzt voraus, dass wir eine aus Punkten, Ebenen und Geraden zusammengesetzte Figur haben, die ganz beliebig

*) Baltzer, Stereometrie S. 79.

*[1]) Sind zwei Figuren affin-collinear, so können sie als ebene Schnitte eines Prismas oder eines Cylinders angesehen werden.

im Raume liegen; man macht davon die Relief-Perspective*) auf folgende Weise. Man nimmt einen Punkt O im Raume als Projections- oder Collineations-Centrum; eine Collineationsebene π, von welcher jeder Punkt sein eigenes Bild sein soll und ausserdem einen Punkt A′, als Bild eines Punktes A der abzubildenden Figur, so dass A A′ durch O geht. Es sei nun B irgend ein anderer Punkt; um sein Bild B′ zu erhalten, legen wir die Ebene O A B und operiren wir in dieser Ebene, wie wenn es sich darum handelte, zwei collineare Figuren zu construiren, von welchen O das Centrum, die Schnittlinie der beiden Ebenen O A B und π die Axe und A, A′ zwei entsprechende Punkte wären. Der Punkt B′ wird der Schnittpunkt von O B mit der Geraden sein, welche durch A′ und den Schnittpunkt der Ebene π und der Geraden A B geht. Nr. 19. Fig. 4.

Sei C ein dritter Punkt; sein Bild C′ wird der Schnittpunkt von O C mit A′ D oder mit B′ E (in π) sein, wo D und E die Punkte sind, in welchen die Ebene π von A C oder B C getroffen wird.

Dieses Verfahren wird für jeden Punkt der gegebenen Figur den entsprechenden Punkt des Bildes geben und zwei entsprechende Punkte werden immer auf einer nach O gerichteten Geraden liegen. Jede durch O gelegte Ebene σ schneidet die beiden räumlichen (körperlichen) Figuren (die gegebene Figur und ihr Bild) nach zwei collinearen Figuren, für welche O das Centrum und die Gerade $\sigma \pi$ die Axe der Collineation ist. Daraus folgt, dass jeder Geraden der gegebenen Figur eine Gerade im Bild entspricht, und dass zwei entsprechende Geraden immer in einer durch O gehenden Ebene liegen und sich in einem Punkte der Ebene π schneiden.

Ich behaupte überdies, dass jeder Ebene α, die der gegebenen Figur angehört und nicht durch O geht, auch eine Ebene α' im Bilde entsprechen muss. In der That, den Geraden a, b, $c \ldots$ der Ebene α entsprechen ebenso viele Geraden a', b', $c' \ldots$; und den Punkten ab, $ac \ldots$ $bc \ldots$ die Punkte $a'b'$, $a'c', \ldots$ $b'c' \ldots$ Mit andern Worten, die Geraden a', b', $c' \ldots$ sind der Art, dass sie sich paarweise schneiden, ohne indess

*) Die Aufgabe kann bei der Construction der Reliefe und der Theaterdecorationen vorkommen (nach Poudra).

einen Allen gemeinsamen Punkt zu haben; also liegen sie in derselben Ebene α' *).

Zwei entsprechende Ebenen α, α' schneiden sich auf der Ebene π. Denn alle Punkte und alle Geraden dieser Ebene entsprechen sich selbst; also fällt die Gerade $\alpha' \pi$ mit der Geraden $\alpha \pi$ zusammen.

Die beiden Ebenen α, α' enthalten offenbar zwei perspectivische Figuren. (Wie die Ebenen σ, σ' von Nr. 9 und 11.)

a) In jeder durch O gehenden Ebene σ gibt es eine Fluchtlinie i', welche das Bild der unendlich fernen Geraden derselben Ebene ist. Die Fluchtlinien zweier Ebenen σ_1, σ_2 haben einen gemeinsamen Punkt, der das Bild des unendlich fernen Punktes der Linie $\sigma_1 \sigma_2$ ist. Die Grenzlinien aller Ebenen σ schneiden sich also paarweise: und da sie nicht alle durch denselben Punkt gehen (weil die durch O gehenden Ebenen nicht alle durch dieselbe Gerade gehen), so müssen sie alle in einer Ebene φ' liegen.

Diese Ebene φ', welche man die Flucht- oder Grenz-Ebene nennen kann, ist der Ebene π parallel, denn alle Fluchtlinien der Ebenen σ sind derselben Ebene π parallel.

Die Fluchtebene φ' ist also der Ort der Geraden, die den unendlich fernen Geraden aller Ebenen des Raumes entsprechen und folglich auch der Ort der Punkte, die den unendlich fernen Punkten aller Geraden des Raumes entsprechen: denn die unendlich ferne Linie einer beliebigen Ebene α ist nichts anderes als die unendlich ferne Gerade der Ebene durch O und parallel mit α; ebenso fällt der unendlich ferne Punkt einer beliebigen Geraden a zusammen mit dem unendlich fernen Punkt der Geraden, die durch O geht und parallel a ist.

b) Die unendlich fernen Punkte des ganzen Raumes sind also der Art, dass ihre Bilder die Punkte einer und derselben Ebene φ' (der Fluchtebene) sind.

Es ist also natürlich, alle unendlich fernen Punkte des Raumes als in derselben Ebene φ (der unendlich fernen

*) Da c' sowohl a' als b' schneidet, ohne durch den Punkt $a'b'$ zu gehen, so hat c' zwei Punkte in der Ebene $a'b'$, folglich liegt die ganze Gerade c' in der Ebene $a'b'$...

Ebene) befindlich zu betrachten, welche als Bild die Ebene φ' hat *).

Wird der Begriff der unendlich fernen Ebene φ angenommen, so ist der unendlich ferne Punkt einer beliebigen Geraden a nichts anderes als der Punkt $a\,\varphi$, und die unendlich ferne Gerade einer beliebigen Ebene α ist nichts anderes als die Gerade $\alpha\,\varphi$. Zwei Geraden sind parallel, wenn sie sich in einem Punkte der Ebene φ schneiden; zwei Ebenen sind parallel, wenn ihre Durchschnittslinie in der Ebene φ liegt etc.

§ 5. **Geometrische Gebilde.**

21. Wir nennen *Punktreihe* eine Figur A, B, C,... die aus Punkten zusammengesetzt ist, welche auf einer Geraden liegen: eine solche ist z. B. die Figur, die aus der Operation der Nr. 5 oder 7 entsteht.

Der *Ebenenbüschel* ist eine Figur α, β, γ,... aus Ebenen gebildet, die alle durch dieselbe Gerade (*Axe*) gehen: z. B. die Figur, die aus der Operation der Nr. 4 oder 6 hervorgeht.

Der *Strahlenbüschel* ist eine Figur a, b, c,... die aus Geraden zusammengesetzt ist, welche alle *in derselben Ebene* liegen und von einem festen Punkte (*Centrum*... *Mittelpunkt des Büschels*) ausgehen: z. B. die Figur, welche man erhielte, indem man die Operation von Nr. 2 auf eine Punktreihe oder diejenige von Nr. 3 auf einen Ebenenbüschel anwendet.

Das *ebene Gebilde* ist aus Punkten und Geraden zusammengesetzt, die alle in *einer* Ebene liegen; es ist z. B. das Ergebniss der Operation von Nr. 3.

Der *Bündel* (Strahlenbündel, Ebenenbündel) ist eine Figur aus Geraden und Ebenen zusammengesetzt, die alle durch einen festen Punkt (*Mittelpunkt des Bündels*) gehen: z. B. die Figur, die aus der Operation Nr. 2 hervorgeht.

22. Die drei ersten Figuren können durch eine Pro-

*) Baltzer, Stereom. S. 81.

jection oder einen Schnitt aus einander abgeleitet werden. Denn *):

Aus einer Punktreihe A, B, C... erhält man einen Ebenenbüschel s (A, B, C...), indem man die Punktreihe aus einer Axe s (Nr. 4) projicirt; man erhält aus der Punktreihe einen Strahlenbüschel O (A, B, C...), indem man die Reihe aus einem Punkte O projicirt (Nr. 2).

Aus einem Ebenenbüschel α, β, γ... erhält man die Punktreihe s (α, β, γ...), indem man ersteren durch eine Transversale s schneidet (Nr. 5), man erhält einen Strahlenbüschel σ (α, β, γ...), indem man den Büschel durch eine Transversalebene σ schneidet (Nr. 3).

Aus einem Strahlenbüschel a, b, c... erhält man die Punktreihe σ (a, b, c...), indem man den Büschel durch eine Transversalebene σ schneidet (Nr. 3); man erhält den Ebenenbüschel O (a, b, c...), indem man den Strahlenbüschel aus einem gegebenen Centrum O projicirt (Nr. 2).

23. Analogerweise werden die beiden letzten Figuren mit Hülfe der Operation 2 oder 3 auseinander abgeleitet; in der That, projicirt man von einem Centrum O aus ein ebenes Gebilde, so erhält man einen Bündel; und umgekehrt, schneidet man einen Bündel durch eine Transversalebene, so erhält man ein ebenes Gebilde. Zwei ebene perspectivische Figuren (Nr. 9) sind zwei Schnitte durch denselben Bündel.

24. Die Elemente der Punktreihe sind die Punkte; die Elemente des Ebenenbüschels sind die Ebenen, die Elemente des Strahlenbüschels sind die Geraden oder Strahlen.

Im ebenen Gebilde kann man sowohl die Punkte als

---

*) Wir bezeichnen mit s (A, B, C...) die Reihe der Ebenen sA, sB, sC...; mit O (A, B, C...) die Reihe der Strahlen OA, OB, OC...; mit s (α, β, γ...) die Reihe der Punkte $s\alpha$, $s\beta$, $s\gamma$...; mit σ (α, β, γ...) die Reihe der Geraden $\sigma\alpha$, $\sigma\beta$, $\sigma\gamma$... Um die Reihe der Punkte A, B, C... zu bezeichnen, bedienen wir uns bald des Zeichens A, B, C,... bald des Zeichens ABC...

die Geraden als Elemente ansehen. Betrachtet man die Punkte als Elemente, so sind die Geraden des ebenen Gebildes eben so viele Punktreihen; betrachtet man aber die Geraden (Strahlen) als Elemente, so sind die Punkte des ebenen Gebildes die Centren von ebenso vielen Strahlenbüscheln.

Das ebene Gebilde, in welchem die Punkte die Elemente sind, enthält also eine unendliche Anzahl von Punktreihen *) und das ebene Gebilde, dessen Elemente die Strahlen sind, enthält eine unendliche Anzahl von Strahlenbüscheln *1).

In dem Bündel kann man ebenso gut die Ebenen als auch die Geraden oder Strahlen als Elemente ansehen. Nimmt man die Ebenen als Elemente, so sind die Geraden des Bündels die Axen von ebenso vielen Ebenenbüscheln; sieht man aber die Geraden als Elemente an, so sind die Ebenen ebenso viele Strahlenbüschel.

Der Bündel enthält also unendlich viele Ebenenbüschel oder unendlich viele Strahlenbüschel, je nachdem man die Ebenen oder die Geraden als Elemente ansieht.

25. Der drei-dimensionale Raum kann auch als eine geometrische Figur angesehen werden, deren Elemente die Punkte oder die Ebenen sind.

Nimmt man die Punkte als Elemente, so sind die Geraden des Raumes eben so viele Punktreihen und die Ebenen des Raumes eben so viele ebene Gebilde. Betrachtet man aber die Ebenen als Elemente, so sind die Geraden des Raumes die Axen von eben so vielen Ebenenbüscheln und die Punkte des Raumes die Centren von eben so vielen Ebenenbündeln. Der Raum schliesst also eine unendliche Anzahl von ebenen Gebilden *2) oder eine unendliche Anzahl von Ebenenbün-

---

*) Eine dieser Punktreihen hat alle ihre Punkte in unendlicher Ferne, jede andere Reihe hat nur einen Punkt im Unendlichen.

*1) Die unendlich ferne Gerade gehört einer unendlichen Anzahl von Strahlenbüscheln an, die alle ihr Centrum in unendlicher Ferne haben, deren Strahlen folglich alle parallel sind.

*2) Eines von ihnen ist ganz in unendlicher Ferne.

deln*) ein, je nachdem man den Punkt oder die Ebene nimmt, um ihn zu construiren.

26. Die drei ersten Figuren, d. h. die Punktreihe, der Ebenenbüschel und der Strahlenbüschel, welche die Eigenschaft besitzen, dass jede aus jeder andern mit Hülfe einer Operation (Nr. 2, 3 ...) abgeleitet werden kann, führen den gemeinsamen Namen: Geometrische Grundgebilde der ersten Stufe.

Die vierte und fünfte Figur, d. h. das ebene Gebilde und der Bündel, welche ebenso auseinander abgeleitet werden können (mit der Operation Nr. 2, 3) und die ausserdem die Eigenschaft besitzen, eine unendliche Anzahl von Grundgebilden der ersten Stufe in sich zu schliessen, heissen geometrische Grundgebilde der zweiten Stufe.

Der Raum selbst, der eine unendliche Anzahl von Gebilden der zweiten Stufe einschliesst, wird als Grundgebilde der dritten Stufe angesehen.

Es gibt also sechs geometrische Grundgebilde, drei der ersten Stufe, zwei der zweiten und eines der dritten Stufe *1).

§ 6. **Das Princip der Dualität oder Reciprocität** *2).

27. Die Geometrie im Allgemeinen studirt die Erzeugung und die Eigenschaften der Figuren, die 1. im unendlichen Raum, 2. in einer Ebene, 3. in einem Bündel liegen. In den drei Fällen ist die betrachtete Figur nichts anderes als ein Inbegriff von Elementen oder, was auf dasselbe herauskommt, die Gesammtheit der successiven Lagen, die von einem beweglichen oder veränderlichen Elemente eingenommen werden. Das bewegliche Element, welches die Figuren erzeugt, kann im ersten Fall der Punkt oder die Ebene sein, im zweiten Fall der Punkt oder die Gerade, im dritten

*) Unter diesen hat es eine unendliche Zahl solcher, deren Centrum in unendlicher Ferne und deren Strahlen folglich parallel sind.

*1) Staudt, Geom. d. Lage, 26, 28.

*2) Staudt, ibid. 66.

Fall die Ebene oder die Gerade. Es gibt also immer zwei correlative oder reciproke Arten der Erzeugung der Figuren oder der Ableitung ihrer Eigenschaften und eben darin besteht die geometrische Dualität, welche die Coexistenz von je zwei Figuren (und folglich auch ihrer Eigenschaften) ist; zwei coexistirende (correlative oder reciproke) Figuren haben die gleiche Entstehung und differiren nur durch die Art des erzeugenden Elementes.

In der Raumgeometrie sind die Punktreihe und der Ebenenbüschel, das ebene Gebilde (aus Punkten) und der Bündel (aus Ebenen), das ebene Gebilde (aus lauter Geraden) und der Bündel (aus lauter Strahlen) correlative Gebilde. Der Strahlenbüschel ist nur zu sich selbst correlativ.

In der Geometrie der Ebene sind die Punktreihe und der Strahlenbüschel correlative Gebilde.

In der Geometrie des Bündels sind der Ebenenbüschel und der Strahlenbüschel correlative Gebilde.

Die Geometrie der Ebene und die Geometrie des Bündels, im drei-dimensionalen Raum betrachtet, sind correlativ.

28. Es folgen einige Beispiele von correlativen Sätzen der Raumgeometrie. Zwei correlative Sätze werden durch Vertauschung der Elemente Punkt und Ebene auseinander abgeleitet.

1. Zwei Punkte A, B bestimmen eine Gerade (die Gerade AB, welche durch die gegebenen Punkte geht), welche noch unendlich viele andere Punkte enthält.	Zwei Ebenen α, β bestimmen eine Gerade ($\alpha\beta$ ist der Schnitt der gegebenen Ebenen), durch welche unendlich viele andere Ebenen gehen.
2. Eine Gerade a und ein Punkt B ausserhalb derselben bestimmen eine Ebene aB, welche die Gerade mit dem Punkte verbindet.	Eine Gerade a und eine Ebene β (die nicht durch die Gerade geht) bestimmen einen Punkt $a\beta$ (wo die Gerade die Ebene schneidet).
3. Drei Punkte A, B, C, die nicht in derselben Geraden liegen, bestimmen eine Ebene: die Ebene ABC geht durch die drei Punkte.	Drei Ebenen α, β, γ, die nicht durch dieselbe Gerade gehen, bestimmen einen Punkt: im Punkte $\alpha\beta\gamma$ schneiden sich die drei Ebenen.

4. Zwei Geraden, die einen gemeinsamen Punkt haben, liegen in derselben Ebene.

5. Vier Punkte A, B, C, D sind gegeben; wenn sich die Geraden AB und CD schneiden, so liegen die vier Punkte in derselben Ebene; folglich schneiden sich auch die Geraden BC und AD, ebenso AC und BD.

6. Wenn eine beliebige Anzahl von Geraden sich paarweise schneiden und nicht durch denselben Punkt gehen, so liegen sie alle in einer Ebene (Geraden eines ebenen Gebildes) *).

Zwei Geraden, die in derselben Ebene liegen, haben einen gemeinsamen Punkt.

Vier Ebenen α, β, γ, δ sind gegeben; wenn sich die beiden Geraden $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ schneiden, so gehen die vier Ebenen durch denselben Punkt, folglich schneiden sich auch die Geraden $\beta\gamma$ und $\alpha\delta$, ebenso $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$.

Wenn eine beliebige Anzahl von Geraden sich paarweise schneiden und nicht in derselben Ebene liegen, so gehen sie alle durch denselben Punkt (Geraden eines Bündels) *1).

7. Die folgende Aufgabe lässt zwei correlative Lösungen zu: „Durch einen gegebenen Punkt A in einer Ebene α eine Gerade zu legen, die eine gegebene Gerade r schneidet und in dieser Ebene α liegt.“ (r liegt nicht in α und geht nicht durch A.)

Man verbindet den Punkt A mit dem Punkt $r\alpha$.

Man construirt die Schnittlinie der Ebene α und der Ebene rA.

8. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt A eine Gerade zu legen, welche zwei gegebene Geraden b, c (die nicht in derselben Ebene liegen und nicht durch A gehen) schneidet.

Auflösung. Man construirt den Durchschnitt der Ebenen Ab, Ac.

Aufgabe. In einer gegebenen Ebene α eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene Geraden b, c schneidet (die keinen gemeinsamen Punkt haben und nicht in der Ebene α liegen).

Auflösung. Man verbindet den Punkt αb mit dem Punkt αc.

29. In der Raumgeometrie sind das Dreieck (System von drei Punkten) und das Dreikant (System von drei Ebenen) correlativ; der Scheitel, die Seiten, die Kanten des Dreikants sind correlativ zu der Ebene, den Eckpunkten und den Seiten des

*) Siehe Anmerkung zu Nr. 20.

*1) Sind a, b, c... die Geraden, so muss, da ab, ac, bc drei verschiedene Ebenen sind, ihr gemeinsamer Punkt der Schnittpunkt der Geraden a, b, c... sein.

Dreiecks; dem Lehrsatz Nr. 12 und 14 ist also folgender reciprok verwandt:

Wenn zwei Dreikante $\alpha' \beta' \gamma'$ und $\alpha'' \beta'' \gamma''$ die Eigenschaft haben, dass die Kanten $\beta' \gamma'$ und $\beta'' \gamma''$, ebenso $\gamma' \alpha'$ und $\gamma'' \alpha''$, ebenso $\alpha' \beta'$ und $\alpha'' \beta''$ sich in drei Ebenen α_0, β_0, γ_0 befinden, welche durch dieselbe Gerade gehen, so liegen die Geraden $\alpha' \alpha''$, $\beta' \beta''$, $\gamma' \gamma''$ in derselben Ebene.

Der Beweis ist derselbe, wie zu Nr. 12 und 14, indem man die Elemente Punkt und Ebene vertauscht. Haben z. B. die beiden Dreikante verschiedene Scheitel S′, S″ (Nr. 12), so sind die Punkte, in welchen sich die Kantenpaare schneiden, die Eckpunkte eines Dreiecks, dessen Seiten $\alpha' \alpha''$, $\beta' \beta''$, $\gamma' \gamma''$ sind; diese letzteren Geraden sind also in derselben Ebene (der Ebene des Dreiecks).

Ebenso wird der Beweis für den Fall, dass die beiden Dreikante denselben Scheitel S haben, zu dem Beweis des analogen Falles zweier Dreiecke A′ B′ C′ und A″ B″ C″ (in derselben Ebene) von Nr. 14 correlativ sein. Der Lehrsatz wird auch gefunden, indem man vom Punkte S aus die Figur projicirt, welche den Satz Nr. 13 ausdrückt.

Man kann den Beweis zu dem Satze finden, der dem in Nr. 11 und 13 correlativ ist, und der so ausgedrückt sei:

Wenn in zwei Dreikanten $\alpha' \beta' \gamma'$, $\alpha'' \beta'' \gamma''$ die Geraden $\alpha' \alpha''$, $\beta' \beta''$, $\gamma' \gamma''$ in derselben Ebene liegen, so bestimmen die Kantenpaare $\beta' \gamma'$ und $\beta'' \gamma''$, $\gamma' \alpha'$ und $\gamma'' \alpha''$, $\alpha' \beta'$ und $\alpha'' \beta''$ drei Ebenen, welche durch dieselbe Gerade gehen.

30. In der ebenen Geometrie werden zwei reciproke Figuren oder Sätze von einander abgeleitet, indem man die Elemente Punkt und Gerade vertauscht.

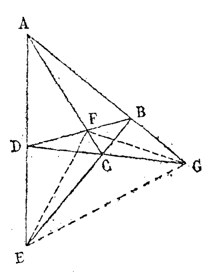
Hier folgen einige Beispiele *):

1. Zwei Punkte A, B bestimmen eine Gerade, die Gerade AB.	Zwei Geraden a, b bestimmen einen Punkt, den Punkt ab.
2. Vier Punkte A, B, C, D (Fig. 11), von denen nicht mehr als zwei in einer Geraden liegen,	Vier Geraden a, b, c, d (Fig. 12), von denen nicht mehr als zwei durch denselben Punkt gehen,

*) Die Punkte und die Geraden, um die es sich handelt, liegen in derselben Ebene.

bestimmen eine Figur, welche man ein vollständiges Viereck nennt.

Fig. 11.



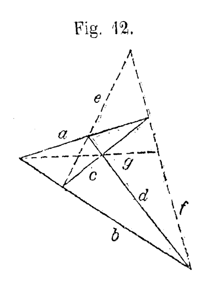
Man nennt Eckpunkte die obigen vier Punkte A, B, C, D, und Seiten desselben Vierecks die sechs Geraden, welche sie paarweise verbinden. Zwei Seiten, welche nicht durch den gleichen Eckpunkt gehen, heissen gegenüberliegende; es hat also drei Paare gegenüberliegender Seiten BC und AD, CA und BD, AB und CD. Die Punkte E, F, G, in denen sich je zwei gegenüberliegende Seiten schneiden, heissen Diagonalpunkte, und das Dreieck EFG heisst das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks. Das vollständige Viereck enthält drei einfache Vierecke: ACBD, ABCD, ABDC (Fig. 13).

3. Allgemein:

Ein vollständiges Vieleck (n Eck) ist ein System von n Punkten (oder Eckpunkten) mit den $\frac{n(n-1)}{2}$ Geraden oder Seiten, welche sie paarweise verbinden.

bestimmen eine Figur, welche man ein vollständiges Vierseit nennt.

Fig. 12.

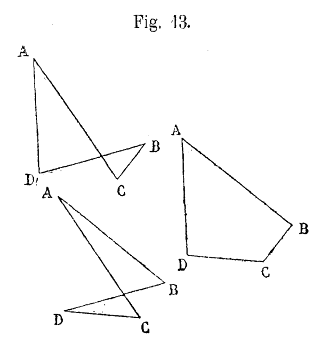


Die vier Geraden heissen die Seiten des Vierseits und seine Eckpunkte sind die sechs Punkte, in denen sich je zwei der vier Seiten schneiden. Zwei Eckpunkte, die nicht auf derselben Seite liegen, heissen gegenüberliegende; es hat also drei Paare gegenüberliegender Eckpunkte bc und ad, ca und bd, ab und cd. Die Geraden e, f, g, welche die gegenüberliegenden Eckpunkte verbinden, heissen Diagonallinien; und das Dreiseit efg heisst das Diagonaldreiseit des vollständigen Vierseits. Das vollständige Vierseit enthält drei einfache Vierseite: $acdb$, $adcb$, $acbd$ (Fig. 14).

Ein vollständiges Vielseit (n Seit) ist ein System von n Geraden (oder Seiten) mit den $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkten oder Eckpunkten, in denen sie sich paarweise schneiden.

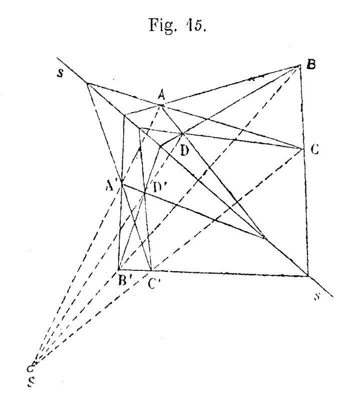
4. Die Lehrsätze von Nr. 13 und 14 sind correlativ oder reciprok.

Fig. 13.



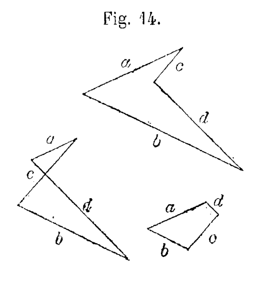
5. Wenn zwei vollständige Vierecke ABCD, A′B′C′D′ die Eigenschaft besitzen, dass von den sechs Seitenpaaren fünf, AB und A′B′, BC und B′C′, CA und C′A′, AD und A′D′ BD und B′D′ sich in fünf Punkten einer Geraden *s* schneiden, so schneidet sich auch das sechste Paar CD und C′D′ auf *s* (Fig. 15).

Fig. 15.



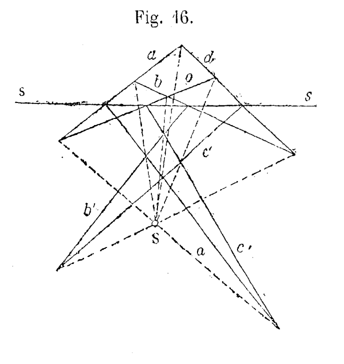
Beweis: In Folge der Voraussetzung sind nach Nr. 15 die Drei-

Fig. 14.



Wenn zwei vollständige Vierseite *a b c d*, *a′ b′ c′ d′* die Eigenschaft besitzen, dass die fünf Paare der Eckpunkte (von den sechs Paaren) *a b* und *a′ b′*, *b c* und *b′ e′*, *c a* und *c′ a′*, *a d* und *a′ d′*, *b d* und *b′ d′* auf fünf Geraden liegen, die in einem Punkte S zusammenlaufen, so liegt auch das sechste Paar Eckpunkte *c d* und *c′ d′* auf einer nach S gerichteten Geraden (Fig. 16).

Fig. 16.



Beweis: In Folge der Voraussetzung sind nach Nr. 14 die Drei-

ecke A B C, A′ B′ C′ perspectivisch, folglich laufen die Geraden A A′, B B′, C C′ in einem Punkt S zusammen. Ebenso sind die Dreiecke A B D, A′ B′ D′ perspectivisch; folglich geht D D′ auch durch S, den Schnittpunkt von A A′ und B B′. Daraus folgt, dass die Dreiecke B C D, B′ C′ D′ auch perspectivisch sind, darum schneiden sich C D und C′ D′ in einem Punkte der Geraden s, welche durch den Schnittpunkt von B C und B′ C′ und den Schnittpunkt von B D und B′ D′ bestimmt ist, w. z. b. w.*)

seite $a\ b\ c$, $a'\ b'\ c'$ perspectivisch; die Punkte $a\ a'$, $b\ b'$, $c\ c'$ liegen also auf derselben Geraden s. Ebenso sind die Dreiseite $a\ b\ d$, $a'\ b'\ d'$ perspectivisch, also liegt der Punkt $d\ d'$ auf der Geraden s, welche durch die Punkte $a\ a'$, $b\ b'$ geht. Daraus folgt, dass die Dreiseite $b\ c\ d$, $b'\ c'\ d'$ auch perspectivisch sind; also liegen die Punkte $c\ d$ und $c'\ d'$ in gerader Linie mit dem Punkt S, welcher durch die Geraden $(b\ c)\ (b'\ c')$ und $(b\ d)\ (b'\ d')$ bestimmt ist, w. z. b. w.

31. In der Raumgeometrie ist das vollständige Vielflach (im Strahlenbündel) von n Seiten correlativ zu dem vollständigen Vieleck mit n Eckpunkten*[1]). Ein vollständiges Vielkant mit n Kanten ist correlativ dem vollständigen Vielseit mit n Seiten. Ein vollständiges Vielkant ist aus n Geraden gebildet, die aus demselben Punkt (Scheitel) gehen mit den $\frac{n\ (n-1)}{2}$ Ebenen (Seiten), welche durch je zwei jener Geraden gehen.

Die zwei folgenden Lehrsätze der Raumgeometrie sind unter sich correlativ und auch zu den zwei vorangehenden Lehrsätzen (Nr. 30. 5), die unter sich correlativ sind (in der Planimetrie).

Wenn zwei vollständige Vierflache (im Strahlenbündel, mit demselben oder verschiedenen Scheiteln) $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$, $\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$ die Eigenschaft besitzen, dass fünf Paare entsprechender Kanten in fünf Ebenen liegen, die

Wenn zwei vollständige Vierkante (mit demselben oder verschiedenen Scheiteln) $a\ b\ c\ d$, $a'\ b'\ c'\ d'$ die Eigenschaft besitzen, dass fünf Paare entsprechender Seiten sich in fünf Geraden schneiden, die in einer Ebene

*) Beide Sätze gelten auch, wenn die beiden Figuren in verschiedenen Ebenen liegen.

*[1]) Ein vollständiges Vielflach (im Strahlenbündel) ist von n Ebenen gebildet, die durch denselben Punkt (Scheitel) gehen, mit den $\frac{n\ (n-1)}{2}$ Kanten, in denen sich die Ebenen paarweise schneiden.

durch dieselbe Gerade s gehen, so liegt auch das sechste Kantenpaar in einer durch s gehenden Ebene.

σ liegen, so wird auch die Schnittlinie des sechsten Seitenpaares in der Ebene σ liegen.

Die Beweise dieser Lehrsätze unterscheiden sich von denjenigen des Satzes Nr. 5 nur in der Vertauschung der Elemente Punkt und Ebene; und so wie die Sätze Nr. 5 eine Folge der Sätze Nr. 12 und 13 sind, so sind obige zwei Lehrsätze eine Folge von Nr. 29.

Haben die beiden Vierflache denselben Scheitel O, so kann der Satz links auch abgeleitet werden, indem man vom Punkte O (Nr. 2) aus die Figur projicirt, welche den Satz Nr. 5 rechts ausdrückt. Unter derselben Voraussetzung zieht man durch das gleiche Verfahren den obigen Satz rechts aus dem Satze Nr. 5 links.

32. In der Geometrie des Bündels werden zwei correlative Sätze oder Figuren von einander abgeleitet, indem man die Elemente Ebene und Gerade vertauscht. So wie die Geometrie des Bündels zu derjenigen der Ebene in Bezug auf den unendlichen Raum correlativ ist, so kann die eine der beiden Geometrien aus der andern abgeleitet werden, indem man die Elemente Punkt und Ebene vertauscht. Die Geometrie des Bündels kann auch aus der ebenen Geometrie abgeleitet werden, indem man die Projection von einem Centrum aus macht (Nr. 2).

Aus der Geometrie des Bündels kann diejenige der sphärischen Figuren abgeleitet werden, indem man den Bündel durch eine Kugelfläche schneidet, die durch das Centrum des Bündels geht.

§ 7. **Projectivische Gebilde.**

33. Mit Hülfe der Projection aus einem Centrum erhält man aus einer Punktreihe einen Strahlenbüschel, aus einem Strahlenbüschel einen Ebenenbüschel, aus einem ebenen Gebilde einen Bündel. Umgekehrt erhält man mit Hülfe eines Schnittes einer Ebene aus einem Strahlenbüschel eine Punktreihe, aus einem Ebenenbüschel einen Strahlenbüschel, aus einem Bündel ein ebenes Gebilde. Die beiden Operationen „aus einem Centrum projiciren“ und „durch eine Transversalebene schneiden“ können als „complementäre“ angesehen wer-

den; und wir werden sagen, dass wenn ein Gebilde durch eine dieser Operationen aus einem andern abgeleitet ist, so kann man durch die complementäre Operation das zweite Gebilde aus dem ersten ableiten. Analogerweise für die Projection aus einer Axe und für den Schnitt durch eine Transversalgerade.

Setzen wir jetzt voraus, dass durch eine Operation (Projection oder Schnitt) aus einem Gebilde f_1 ein Gebilde f_2 abgeleitet sei, dass durch eine andere Operation aus f_2 ein drittes Gebilde f_3, aus f_3 ein viertes Gebilde f_4 abgeleitet sei und so fort, bis durch n—1 Operationen ein Gebilde f_n hergestellt werde. Umgekehrt werden wir aus f_n auf f_1 mit Hülfe von n—1 Operationen zurückkehren, die der Reihe nach der letzten, der zweitletzten, drittletzten etc.... derjenigen Operationen complementär sind, welche dazu gedient haben von f_1 auf f_n zu gelangen. Die Reihe der Operationen, welche von f_1 auf f_n und derjenigen, welche von f_n auf f_1 führen, können complementäre genannt werden und die Operationen der einen Reihe sind bezüglich complementär denjenigen der zweiten Reihe, in umgekehrtem Sinne genommen.

In dem Vorangegangenen setzen wir voraus, dass die geometrischen Gebilde im Raume liegen (Nr. 25). Bleiben wir bei der ebenen Geometrie, so reduciren sich die complementären Operationen auf die Projection aus einem Centrum und den Schnitt durch eine transversale Gerade. In der Geometrie des Bündels sind der Schnitt durch eine Ebene und die Projection aus einer Axe complementäre Operationen.

34. Zwei Grundgebilde der ersten Stufe heissen projectivisch, wenn das eine durch eine endliche Anzahl von Projectionen und Schnitten (Nr. 2, 3...7) aus dem andern abgeleitet werden kann. Hat man z. B. eine Punktreihe u und projicirt sie aus einem Centrum O, so erhält man einen Strahlenbüschel; man projicire den Strahlenbüschel aus einem andern Centrum O′, so erhält man einen Ebenenbüschel mit der Axe O O′, man

schneide diesen Ebenenbüschel durch eine Gerade u_2 und erhält eine Punktreihe, deren Träger u_2 ist, projicire die Punktreihe u_2 aus einer Axe und erhält einen Ebenenbüschel, schneide diesen Ebenenbüschel durch eine Ebene und erhält einen Strahlenbüschel etc.; so sind zwei beliebige der so erhaltenen Grundgebilde der ersten Stufe nach der Definition projectivisch.

Wenn man sagt, dass ein Gebilde A, B, C, D ... zu einem anderen A′, B′, C′, D′ ... projectivisch sei, so ist damit gemeint, dass mit Hülfe derselben Reihe von Operationen (Projectionen und Schnitten) A′ aus A, B′ aus B, C′ aus C. etc. abgeleitet werde.

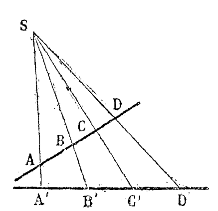
Die Elemente A und A′, B und B′, C und C′ ... heissen entsprechende Elemente.

35. Aus dem Gesagten ist leicht einzusehen, dass zwei Gebilde, die zu einem dritten projectivisch sind, auch unter sich projectivisch sind. Denn macht man zuerst die Operationen, die dazu dienen, von dem ersten zum dritten Gebilde zu gelangen, dann diejenigen, welche dazu dienen, von dem dritten zum zweiten zu gelangen, so hat man den Uebergang von dem ersten zum zweiten Gebilde ausgeführt.

36. Perspectivische Gebilde.

Zwei Punktreihen sind perspectivisch, wenn sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels sind (Nr. 9) (Fig. 17).

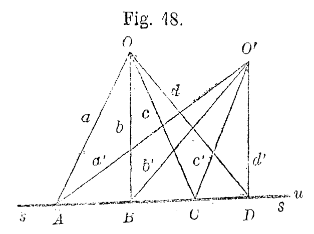
Fig. 17.



Zwei Strahlenbüschel sind perspectivisch (Fig. 18), wenn sie dieselbe Punktreihe aus zwei verschie-

denen Centren projiciren, oder wenn sie zwei Schnitte desselben Ebenenbüschels sind.

Fig. 18.



(Projicirt man eine Punktreihe $u \equiv ABC\ldots$ aus zwei verschiedenen Centren O und O', die nicht mit u in derselben Ebene liegen, so erhält man zwei perspectivische Strahlenbüschel, die ausserdem als Schnitte der Transversalebenen Ou und O'u durch denselben Ebenenbüschel angesehen werden können, welcher Ebenenbüschel als Axe die Gerade O O' hat und aus den Ebenen O O' A, O O' B, O O' C, O O' D zusammengesetzt ist. Das ist der allgemeine Fall von zwei perspectivischen Strahlenbüscheln. Sie haben nicht dasselbe Centrum und sind in verschiedenen Ebenen; gleichzeitig projiciren sie dieselbe Punktreihe und sind Schnitte desselben Ebenenbüschels. Es gibt zwei singuläre Fälle: 1. Projicirt man die Punktreihe u aus zwei Centren O und O', die mit u in derselben Ebene liegen, so liegen die beiden Strahlenbüschel in derselben Ebene und sind folglich nicht mehr Schnitte eines Ebenenbüschels; 2. wird ein Ebenenbüschel durch zwei Transversalebenen geschnitten, die durch denselben Punkt O der Axe gehen, so erhält man zwei Strahlenbüschel, die dasselbe Centrum O haben und folglich nicht mehr dieselbe Punktreihe projiciren.)

Zwei Ebenenbüschel sind perspectivisch, wenn sie denselben Strahlenbüschel aus zwei verschiedenen Centren projiciren.

Eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel oder eine Punktreihe und ein Ebenenbüschel oder ein Strahlenbüschel und ein Ebenenbüschel sind perspectivisch, wenn das erste Gebilde ein Schnitt des zweiten ist.

Zwei ebene Gebilde sind perspectivisch, wenn sie ebene Schnitte desselben Bündels sind.

Zwei Bündel sind perspectivisch, wenn sie dasselbe ebene Gebilde aus zwei verschiedenen Centren projiciren.

Ein ebenes Gebilde und ein Bündel sind perspectivisch, wenn das Gebilde ein Schnitt des Bündels ist.

Aus der Definition Nr. 34 folgt, dass *zwei perspectivische Gebilde* (erster Stufe) *auch projectivisch sind*; aber *zwei projectivische Gebilde sind im Allgemeinen nicht in perspectivischer Lage*.

37. *Zwei geometrische Gebilde der ersten Stufe, aus je drei Elementen zusammengesetzt, sind immer projectivisch.*

Um diese Behauptung zu beweisen, beachten wir vor Allem, dass es genügt, den Fall von zwei Punktreihen A B C, A′ B′ C′ zu untersuchen; denn wenn eines der gegebenen Gebilde ein Büschel ist, so kann man an dessen Stelle einen seiner Schnitte durch eine Transversale setzen.

Wenn die beiden Geraden A B C, A′ B′ C′ nicht in derselben Ebene liegen, führen wir die Geraden A A′, B B′, C C′ und schneiden sie durch eine Transversale s *). Dann sind die beiden gegebenen Gebilde nichts anderes als zwei (gerade) Schnitte des Ebenenbüschels s A A′, s B B′, s C C′.

Fig. 19.

Liegen die beiden Geraden in derselben Ebene (Fig. 19), so nehmen wir auf A A′ zwei Punkte S, S′ beliebig, ziehen

*) Es genügt, durch einen beliebigen Punkt von A A′ eine Gerade zu legen, welche B B′ und C C′ trifft. (Aufg. 8 in Nr. 28.)

SB, $S'B'$, die sich in B'' schneiden, SC und $S'C'$, die sich in C'' schneiden; die Verbindung dieser zwei Punkte (B'' und C'') schneide SS' in A''. Dann ist $A''B''C''$ ebenso gut eine Projection von ABC als von $A'B'C'$ aus den Centren S und S'.

In dem Fall, wo die Punkte A und A' coincidiren (Fig. 20), sind die beiden gegebenen Gebilde (Punktreihen ABC und

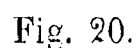
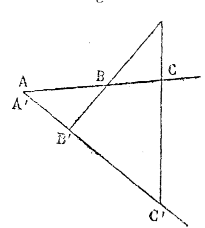


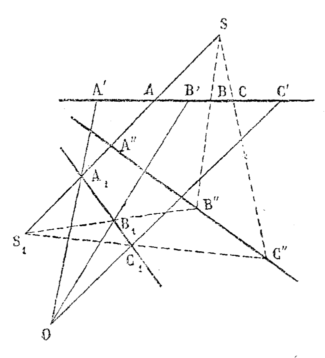
Fig. 20.



$A'B'C'$) direct perspectivisch; das Projectionscentrum S ist der Schnittpunkt von BB' und CC'.

Liegen endlich beide Punktreihen ABC, $A'B'C'$ auf derselben Geraden (Fig. 21), so wird es genügen, eine der beiden

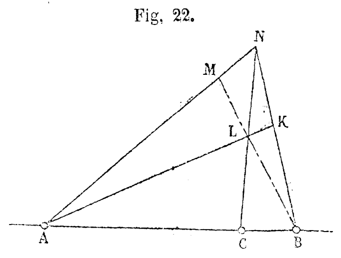
Fig. 21.



Reihen ($A'B'C'$) auf eine andere Gerade $A_1B_1C_1$ (aus einem beliebigen Centrum O) zu projiciren; dann projicire man die beiden Reihen ABC und $A_1B_1C_1$ aus zwei beliebigen Centren S und S_1 auf der Geraden AA_1 nach Fig. 19 auf $A''B''C''$; so ist dann $A''B''C''$ eine Projection von ABC (von S aus); ebenso ist $A''B''C''$ die Projection von $A_1B_1C_1$ von S_1 aus, und $A_1B_1C_1$ die Projection von $A'B'C'$ vom Centrum O aus.

Will man z. B. A B C in B A C projiciren (Fig. 22), so genügt es, zwei beliebige Punkte L und N anzunehmen, die

Fig. 22.



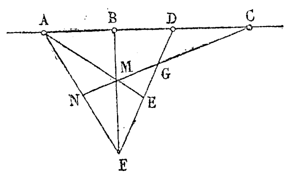
mit C in derselben Geraden liegen. Ist K der Schnittpunkt von A L und B N, M derjenige von B L und A N, so ist L N C eine Projection von A B C aus dem Centrum K, und B A C eine Projection von L N C aus dem Centrum M.

Um von A B C zu B C A zu gelangen, projicire man A B C in B C A, und hierauf B A C in B C A.

38. **Lehrsatz.** Ein beliebiges Gebilde (der ersten Stufe), das aus vier Elementen A, B, C, D zusammengesetzt ist, ist zu demjenigen Gebilde projectivisch, das aus dem ersten abgeleitet wird, indem man darin zwei beliebige Elemente und zugleich auch die beiden andern vertauscht. So ist A B C D projectivisch zu B A D C.

Beweis: Es sind A, B, C, D vier Punkte (Fig. 23), und E F G D eine Projection dieser Punkte aus dem Centrum M

Fig. 23.



auf eine durch D gehende Gerade D F. Ist N der Schnittpunkt von A F und C M, so wird M N G C eine Projection von E F G D aus dem Centrum A; und B A D C wird eine Projection von M N G C aus dem Centrum F; folglich ist nach Nr. 34 und 35 das Gebilde B A D C projectivisch zu A B C D. Man

beweist auf dieselbe Art, dass C D A B und D C B A zu A B C D projectivisch sind *).

Daraus folgt z. B.: wenn der Strahlenbüschel $a\ b\ c\ d$ zu der Punktreihe A B C D projectivisch ist, so ist er auch zu B A D C, C D A B, D C B A projectivisch, d. h. sind zwei Gebilde aus je vier Elementen projectivisch, so kann die Entsprechung der Elemente auf vier verschiedene Arten hergestellt werden.

§ 8. **Harmonische Gebilde.**

39. **Lehrsatz** *1) (nach Staudt). Wenn drei Punkte A, B, C auf einer Geraden s gegeben sind und man in einer beliebigen Ebene durch s das vollständige Viereck (K L M N) so construirt, dass zwei Gegenseiten (K L, M N) in A zusammen treffen, zwei andere Gegenseiten (K N, M L) in B convergiren und die fünfte Seite (L N) durch C geht, so schneidet die sechste Seite (K M) die Gerade s in einem Punkt D, der durch die drei gegebenen Punkte bestimmt ist; der Punkt D bleibt fest, wie auch die zufälligen Elemente des Vierecks verändert werden mögen (Fig. 24).

Wenn drei gegebene Geraden a, b, c (in derselben Ebene) in einem Punkt S zusammen laufen und man ein vollständiges Vierseit ($k\ l\ m\ n$) so construirt, dass zwei gegenüberliegende Eckpunkte ($k\ l$, $m\ n$) auf a fallen, zwei andere gegenüberliegende Eckpunkte ($k\ n$, $m\ l$) auf b und der fünfte Eckpunkt ($l\ n$) auf c, so wird der sechste Eckpunkt ($k\ m$) auf eine Gerade d fallen, die durch S geht und bestimmt ist; die Linie d bleibt fest, wie auch die zufälligen Elemente des Vierseits verändert werden mögen (Fig. 25).

Fig. 24.

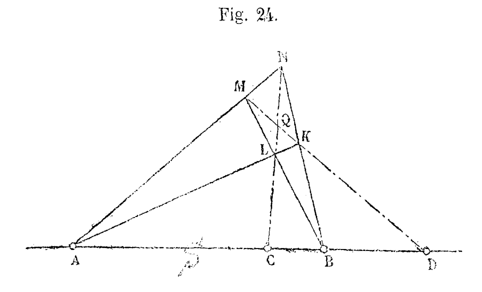
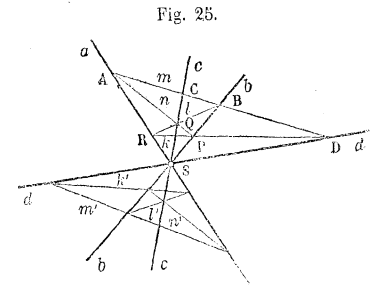


Fig. 25.



*) Staudt, Geometrie der Lage (Nürnberg, 1847) Nr. 59.

*1) Staudt, loc. cit. S. 93.

Beweis: Construirt man (in derselben oder in einer anderen Ebene durch s) ein zweites vollständiges Viereck ($K' L' M' N'$), welches den vorgeschriebenen Bedingungen entspricht, so haben die beiden Vierecke fünf Paare entsprechender Seiten, die auf der gegebenen Geraden zusammenlaufen; also muss auch das sechste Paar auf derselben Geraden convergiren (Nr. 30, 5. links).

Daraus folgt: wenn das erste Viereck fest liegt, das zweite auf alle möglichen Arten verändert wird, so bleibt der Punkt D fest; w. z. b. w.

Die vier Punkte ABCD heissen harmonische, oder man sagt: es ist das aus diesen vier Punkten zusammengesetzte geometrische Gebilde ein harmonisches.

Man kann sich auch so ausdrücken: Vier Punkte ABCD einer Geraden (in der ausgesprochenen Reihenfolge genommen) heissen harmonisch, wenn es möglich ist, ein vollständiges Viereck so zu construiren, dass zwei gegenüberliegende Seiten durch A, zwei andere gegenüberliegende Seiten durch B, die fünfte durch C, die sechste durch D gehen. Es folgt aus dem vorhergehenden Lehrsatz, dass wenn ein solches Viereck existirt, d. h. wenn das

Construirt man ein zweites vollständiges Vierseit ($k' l' m' n'$), welches den vorgeschriebenen Bedingungen entspricht, so haben die beiden Vierseite fünf Paare entsprechender Eckpunkte, die auf den gegebenen Punkt gerichtet sind; also muss auch das sechste Paar mit diesem Punkte in gerader Linie liegen (Nr. 30, 5. rechts).

Daraus folgt: wenn das erste Vierseit fest liegt, das zweite auf alle möglichen Arten verändert wird, so bleibt die Gerade d fest; w. z. b. w.

Die vier Geraden (oder Strahlen) $abcd$ heissen harmonische, oder man sagt: es ist das aus diesen vier Geraden zusammengesetzte geometrische Gebilde ein harmonisches.

Man kann sich auch so ausdrücken: Vier Strahlen $abcd$ eines Büschels (in der ausgesprochenen Reihenfolge genommen) heissen harmonisch, wenn es möglich ist, ein vollständiges Vierseit so zu construiren, dass zwei gegenüberliegende Eckpunkte auf a, zwei andere gegenüberliegende Eckpunkte auf b, der fünfte auf c, der sechste auf d fallen. Es folgt aus dem vorhergehenden Lehrsatz, dass wenn ein solches Vierseit existirt, d. h.

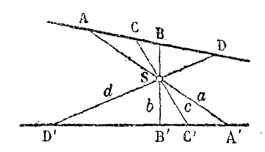
Gebilde ABCD harmonisch ist, man eine unendliche Anzahl anderer Vierecke construiren kann, welche denselben Bedingungen entsprechen. Des Weiteren folgt daraus: wenn drei Punkte ABC auf einer Geraden gegeben sind (und es ist auch ihre Reihenfolge gegeben), so ist der vierte Punkt D, der mit ihnen ein harmonisches Gebilde ausmacht, bestimmt und wird durch die Construction eines der Vierecke (Nr. 51) erhalten.

wenn das Gebilde $abcd$ harmonisch ist, man eine unendliche Anzahl anderer Vierseite construiren kann, welche denselben Bedingungen entsprechen. Des Weiteren folgt daraus: wenn drei Strahlen abc eines Büschels gegeben sind (und es ist auch ihre Reihenfolge gegeben), so ist der vierte Strahl d, der mit ihnen ein harmonisches Gebilde ausmacht, bestimmt und wird durch die Construction eines der Vierseite (Nr. 51) erhalten.

40. **Satz.** Projicirt man aus einem Punkte S die harmonischen Punkte ABCD auf eine andere Gerade, so sind die Projectionen A′B′C′D′ ebenfalls vier harmonische Punkte (Fig. 26).

Stellen wir uns vor, es werden durch die beiden Geraden AB, A′B′ zwei Ebenen gelegt und setzen wir voraus, es werde in der ersten Ebene ein vollständiges Viereck construirt, von

Fig. 26.



welchem zwei gegenüberliegende Seiten in A, zwei andere Gegenseiten in B convergiren und die fünfte Seite durch C gehe, dann wird die sechste Seite durch D gehen (Nr. 39), weil nach Voraussetzung das Gebilde ABCD harmonisch ist. Projiciren wir jetzt dieses Viereck aus dem Punkte S auf die zweite Ebene durch A′B′, so bekommen wir ein neues Viereck, von welchem zwei Gegenseiten in A′, zwei andere in B′ zusammenlaufen, dessen fünfte Seite durch C′ und dessen sechste Seite durch D′ geht; folglich ist A′B′C′D′ ebenfalls ein harmonisches Gebilde.

41. Die Betrachtung der Figur 25 zeigt, dass die harmonischen Strahlen *a*, *b*, *c*, *d* durch eine beliebige Transversale (z. B. *m*) in vier harmonischen Punkten geschnitten werden. Denn: man nehme willkürlich in *a* einen Punkt R, verbinde diesen mit D und B durch die Geraden *k* und *l*, und A mit *k b* oder P durch die Gerade *n*. Da *a b c d* ein harmonisches Gebilde ist und fünf Eckpunkte des vollständigen Vierseits *k l m n* in *a*, *b* und *d* liegen, so gehört der sechste Eckpunkt *l n* oder Q dem vierten Strahl *c* an. Dann ist auch wegen des vollständigen Vierecks P Q R S (wo S der Mittelpunkt des Büschels *a b c d* ist) A B C D ein harmonisches Gebilde.

Setzen wir umgekehrt voraus, dass das harmonische Gebilde A B C D (Fig. 25) gegeben sei und nehmen wir das Projectionscentrum S beliebig, so behaupte ich, dass die projicirenden Strahlen S (A, B, C, D) harmonisch sind.

Denn legen wir durch A eine beliebige Gerade, die S B in P und S C in Q schneide, ziehen dann B Q, welche A S in R schneide, so schneiden sich in dem Viereck P Q R S zwei Gegenseiten in A, zwei andere in B und die fünfte Seite geht durch C, folglich muss die sechste Seite durch D gehen (Nr. 39, links), weil nach Voraussetzung das Gebilde A B C D harmonisch ist. Aber nun haben wir ein vollständiges Vierseit *k l m n*, das zwei Gegenecken A und R auf S A, zwei andere Gegenecken B und P auf S B, einen fünften Eckpunkt Q auf S C und den sechsten D auf S D hat; folglich (Nr. 39 rechts) sind die vier Geraden, die aus S die Reihe A B C D projiciren, harmonisch. Daraus ergibt sich:

Vier harmonische Strahlen werden durch eine beliebige Transversale in vier harmonischen Punkten geschnitten und umgekehrt: die Strahlen, welche vier harmonische Punkte aus einem beliebigen Centrum projiciren, sind harmonisch.

42. Der Satz Nr. 39, rechts ist reciprok (in der ebenen Geometrie) zu dem links daneben stehenden, in welchem man voraussetzt, dass alle Vierecke in derselben Ebene liegen. Nach dem Vorangehenden ist der Satz Nr. 39, links auch noch

wahr und hat denselben Beweis, wenn die Vierecke in verschiedenen Ebenen liegen.

Betrachtet man also letztern Satz als einen solchen der Raumgeometrie, so wird der reciproke Satz folgender sein:

Gehen drei Ebenen α, β, γ durch dieselbe Gerade s und construirt man ein vollständiges Vierseit (im Strahlenbündel) $\varkappa\lambda\mu\nu$, dessen Scheitel ein beliebiger Punkt von s sei und von welchem zwei gegenüberliegende Kanten $\varkappa\lambda$, $\mu\nu$ in der Ebene α, zwei andere gegenüberliegende Kanten $\varkappa\nu$, $\lambda\mu$ in der Ebene β, die fünfte Kante $\lambda\nu$ in γ liegen, so liegt die sechste Kante $\varkappa\mu$ immer in einer bestimmten durch s gehenden Ebene δ, welche dieselbe bleibt, in welcher Art auch die zufälligen Elemente des Vierseits verändert werden mögen.

Denn construirt man (aus demselben oder aus einem andern Scheitel in s genommen) ein anderes vollständiges Vierseit, welches den vorgeschriebenen Bedingungen entspricht, so haben die beiden Vierseite fünf Paare entsprechender Kanten, welche in Ebenen liegen, die durch dieselbe Gerade s gehen: also muss (nach Nr. 31 links) das sechste Paar ebenfalls in einer Ebene liegen, die durch die Gerade s geht. Wir nennen die vier Ebenen α, β, γ, δ harmonische Ebenen und sagen, das Gebilde, das aus ihnen zusammengesetzt ist, sei ein harmonisches Gebilde.

43. Schneidet man ein vollständiges Vierseit (im Strahlenbündel) $\varkappa\lambda\mu\nu$ durch irgend eine Ebene, die nicht durch den Scheitel geht, so erhält man ein vollständiges Vierseit (in der Ebene); dieselbe Transversalebene schneidet die Ebenen α, β, γ, δ in vier Strahlen a, b, c, d eines Strahlenbüschels, von dem die beiden ersten Strahlen je zwei Paare der Eckpunkte des Vierseits enthalten, während die beiden andern Strahlen durch den fünften und sechsten Eckpunkt des Vierseits gehen. Folglich werden (Nr. 39 rechts) vier harmonische Ebenen, α, β, γ, δ, durch eine Transversalebene in vier harmonischen Strahlen geschnitten. Ebenso: wenn die vier har-

monischen Ebenen α, β, γ, δ durch eine Transversale in den vier Punkten A, B, C, D geschnitten werden, so ist das Gebilde ABCD harmonisch. Denn legen wir durch die transversale Gerade eine Ebene, so wird diese die Ebenen α, β, γ, δ nach vier Geraden a, b, c, d schneiden.

Die vier Geraden sind nach dem eben bewiesenen Satze harmonisch; aber ABCD ist ein Schnitt des Strahlenbüschels $abcd$; folglich sind (nach Nr. 41 Ende) die vier Punkte A, B, C, D harmonisch. Umgekehrt: projicirt man vier harmonische Punkte aus einer Axe oder vier harmonische Strahlen aus einem Punkte, so erhält man vier harmonische Ebenen.

44. Verstehen wir also unter einem harmonischen Gebilde eine Gruppe von vier harmonischen Punkten oder vier harmonischen Strahlen oder vier harmonischen Ebenen, so haben wir den Satz:

Jede Projection und jeder Schnitt eines harmonischen Gebildes ist wieder ein harmonisches Gebilde; oder:

Jedes Gebilde, welches zu einem harmonischen Gebilde projectivisch ist, ist ebenfalls harmonisch.

Umgekehrt sind zwei harmonische Gebilde immer projectivisch. Um diese Eigenschaft zu beweisen, genügt es, zwei Gruppen von je vier harmonischen Punkten zu betrachten; denn wenn eines der Gebilde ein Büschel ist, so erhält man vier harmonische Punkte, indem man den Büschel durch eine Transversale schneidet. Setzen wir also voraus, es seien ABCD, A′B′C′D′ zwei harmonische Gebilde und projiciren wir ABC in der in Nr. 37 erklärten Weise auf A′B′C′; dieselben Operationen (Projectionen und Schnitte), welche dazu dienen, A′B′C′ von ABC abzuleiten, werden für D einen Punkt D_1 geben; daraus folgt, dass das Gebilde A′B′C′D_1 harmonisch sein wird, so wie es ABCD ist. Aber nach Voraussetzung sind auch A′B′C′D′ vier harmonische Punkte; also muss D_1 mit D′ zusammenfallen, denn die drei Punkte A′B′C′ bestimmen den vierten Punkt, der mit ihnen ein harmonisches Gebilde ausmacht (Nr. 39 links); w. z. b. w.

Dazu kommt eine Folge der in Nr. 42 und 43 gegebenen Definitionen.

Die correlative Form eines harmonischen Gebildes ist selbst ein harmonisches Gebilde.

45. Wenn a, b, c, d die Strahlen eines Büschels sind (Fig. 26), so sagt man, dass a und b getrennt sind durch c und d, wenn der sich drehende Strahl nicht von a nach b gelangen kann, ohne mit einem und nur mit einem der beiden anderen Strahlen c oder d zusammen zu fallen. Dieselbe Definition wird auf vier Ebenen eines Büschels oder auf vier Punkte A, B, C, D einer Punktreihe angewandt (Fig. 24); die einzige Bedingung, welche man dabei anzunehmen hat, ist die, dass man auf einer Geraden auf zwei verschiedenen Wegen von einem Punkte A zu einem Punkte B gelangen kann (Fig. 27), indem man die endliche Strecke AB durchläuft oder die

Fig. 27.

unendliche Strecke, welche in A anfängt, durch den unendlich fernen Punkt geht und in B zurückkehrt.

Wird diese Definition angenommen, so kann folgende Eigenschaft als an und für sich klar ausgesprochen werden. Vier Elemente eines Gebildes der ersten Stufe (d. h. vier Punkte einer Geraden, vier Strahlen eines Büschels etc.) können immer so in zwei Paare getheilt werden, dass das eine durch das andere getrennt wird; das kann nur auf eine einzige Art geschehen. In Fig. 24 z. B. sind die beiden Paare, die sich gegenseitig trennen, AB und CD, und wenn A′B′C′D′ ein projectivisches Gebilde von ABCD ist, so ist auch das Paar A′B′ durch das Paar C′D′ getrennt; denn die Projectionen und Schnitte verändern die gegenseitige Lage der Elemente nicht.

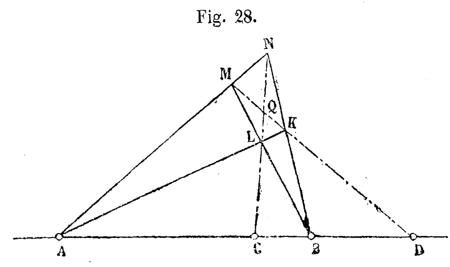
46. Es seien ABCD vier harmonische Punkte, d. h. vier Punkte, die man durch die Construction von Nr. 39 links erhielt. Diese lässt zu, dass auf eine unendliche Anzahl von

Arten ein vollständiges Viereck gezeichnet werde, von dem A und B zwei Diagonalpunkte (Nr. 30, 2. links) sind, während die beiden anderen Gegenseiten durch C und D gehen. Es genügt, diese Construction anzuführen, um einzusehen, dass die beiden Punkte A und B in Bezug auf das System die gleiche Bedeutung haben und dass es sich ebenso mit den Punkten C und D verhält. Daraus folgt: wenn das Gebilde ABCD ein harmonisches ist, so sind auch die Gebilde BACD, ABDC, BADC harmonisch, welche man erhält, indem man die Buchstaben A und B oder C und D oder beide Paare permutirt. Folglich ist (nach Nr. 44) das Gebilde ABCD z. B. projectivisch zu BACD, d. h. man kann durch eine endliche Anzahl von Projectionen und Schnitten von dem einen Gebilde zum andern übergehen. In der That: projicirt man (Fig. 28) von K aus das Gebilde ABCD auf CQ, so erhält man das Gebilde LNCQ, welches von M aus auf AB projicirt ABCD gibt.

47. In dem harmonischen Gebilde ABCD sind die Punkte A und B nothwendigerweise durch die beiden andern **getrennt.**

Denn projiciren wir (Fig. 28) das Gebilde ABCD zuerst aus dem Centrum L, dann aus dem Centrum N auf die Ge-

Fig. 28.

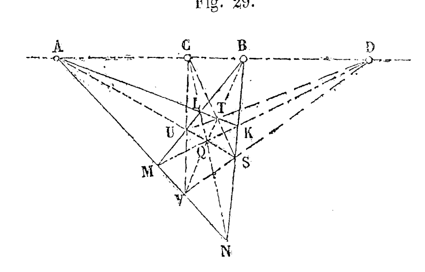


rade KM, so sind KMQD und MKQD die beiden Projectionen. Diese aus denselben Elementen zusammengesetzten Gebilde müssen dieselbe Art der Trennung zeigen, also sind die Punkte K und M getrennt durch Q und D und folglich A und B getrennt durch C und D.

48. Ziehen wir (Fig. 29) die Gerade AQ, welche MB in U und NB in S und die Gerade BQ, welche KL

in T und MN in V schneidet. Das vollständige Viereck LTQU hat zwei Gegenseiten LT und UQ, die sich in A zwei andere Gegenseiten UL und TQ, die sich in B schneiden, eine fünfte Seite (LQ oder LN) geht durch C; also muss die sechste Seite TU durch D gehen (Nr. 39). Ebenso muss die sechste Seite VS des vollständigen Vierecks NVQS durch D, die sechsten Seiten ST und UV der voll-

Fig. 29.



ständigen Vierecke KSQT und MUQV durch C gehen. Man erhält so ein Viereck STUV, von dem zwei Gegenseiten durch C, zwei andere Gegenseiten durch D, die fünfte Seite durch A, die sechste durch B gehen. Man sieht also, dass die den Punkten C und D gemeinsame Bedingung (Nr. 46) dieselbe ist, wie diejenige, welche A und B gemeinsam haben; oder was auf das Gleiche herauskommt, das Paar A und B kann mit dem Paar C und D vertauscht werden. Wenn also ABCD ein harmonisches Gebilde ist, so sind nicht nur BACD, ABDC, BADC, sondern auch CDAB, CDBA, DCAB, DCBA ebenfalls solche *).

Die Punkte A und B heissen *zugeordnete* oder *conjugirte* Punkte; es sind also auch C und D conjugirte Punkte.

Man sagt: die Punkte A und B sind durch die Punkte C und D *harmonisch getrennt*; oder die Punkte C und D sind durch A und B harmonisch getrennt, oder auch das Segment AB ist durch die Punkte C und D oder durch das Segment CD harmonisch getheilt. Sind zwei Punkte A und B (Fig. 28) durch die Punkte C und D harmonisch getrennt, so dass die Gerade AB durch die

*) Reye, Geometrie der Lage (Hannover 1866. I. 34).

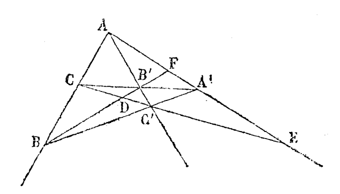
beiden Geraden QC und QD geschnitten wird, so sagt man auch, die Punkte A und B sind durch die Geraden QC und QD oder durch den Punkt C und die Gerade QD etc. harmonisch getrennt und die Geraden QC und QD sind durch die Punkte A und B harmonisch getrennt...

Analoge Eigenschaften und Ausdrücke werden für vier harmonische Strahlen oder Ebenen gefunden.

49. Aus dem Satze Nr. 39 links kann man auch den folgenden ziehen: In einem vollständigen Vierseit wird jede Diagonale durch die beiden andern harmonisch getheilt*).

In dem vollständigen Vierseit (Fig. 30) z. B. sind die Gegenecken A und A′, B und B′, C und C′. Die Diagonale AA′ wird in den Punkten F und E durch die beiden anderen

Fig. 30.



Diagonalen BB′ und CC′ geschnitten. Betrachten wir jetzt das vollständige Viereck BB′CC′, so finden wir darin zwei Gegenseiten, die sich in A schneiden; zwei andere Gegenseiten schneiden sich in A′, während die fünfte Seite durch E, die sechste durch F geht. Die Punkte A und A′ werden also durch die beiden Punkte F und E harmonisch getrennt. Ebenso zeigt die Betrachtung der beiden vollständigen Vierecke CC′AA′ und AA′BB′, dass dieselbe Eigenschaft auch den beiden Gruppen BB′FD und CC′DE zukommt.

50. In dem vollständigen Viereck BB′CC′ sind A, A′ und D die Diagonalpunkte; da die Gruppe der Punkte BB′FD harmonisch ist, so ist es auch (Nr. 41) die Gruppe der vier Strahlen, welche sie aus A projiciren; d. h.

*) Carnot, Géométrie de position (Paris 1803), Nr. 225. — Baltzer, Trigonometrie, S. 371.

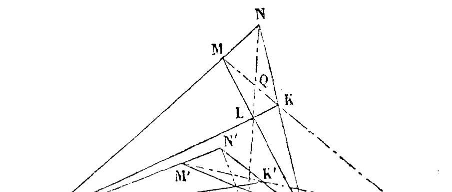
In einem vollständigen Viereck sind zwei in einem Diagonalpunkt zusammenstossende Seiten durch die beiden andern Diagonalpunkte harmonisch getrennt. Dieser Satz ist übrigens (nach der Reciprocität in der ebenen Geometrie) zu dem Vorhergehenden correlativ.

51. Mit Hülfe eines Lineales und der Sätze Nr. 39 werden folgende Aufgaben gelöst:

Zu drei gegebenen Punkten einer harmonischen Punktreihe den vierten zu finden.

Auflösung. In Fig. 30_1 seien A, B und C die gegebenen Punkte (in gerader Linie); davon sollen A und B zugeordnete Punkte sein. Man lege zwei beliebige

Fig. 30_1.

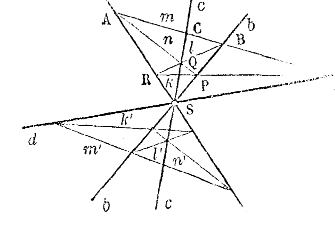


Geraden durch A und eine durch C; die letztere schneide die beiden erstern in L und N und ziehe BL und BN. Die Gerade BL schneide AN in M und BN schneide AL in K; dann trifft KM die gegebene Gerade in dem gesuchten Punkte D, der C zugeordnet ist *).

Zu drei gegebenen Strahlen eines harmonischen Büschels den vierten zu finden.

In Fig. 30_2 seien a, b und c die gegebenen Strahlen (aus demselben Centrum und in derselben Ebene), davon sollen a und b zugeordnete Strahlen sein. Durch

Fig. 30_2.

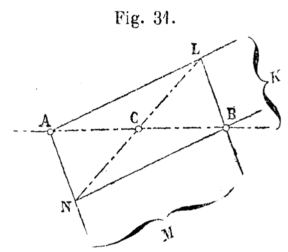


einen Punkt Q der Geraden c ziehen wir beliebig zwei Geraden, welche a in A und R und b in P und B schneiden. Die Geraden AB und RP schneiden sich in einem Punkte D, der, mit dem gegebenen Centrum S verbunden, den gesuchten Strahl d gibt. Dieser Strahl d ist c zugeordnet.

*) De La Hire, Sectiones conicae (Parisiis 1665), S. 9.

52. Punkt C liege in der Mitte von A und B (Nr. 51, links). Wir können die willkürlichen Elemente so legen, dass die Punkte K und M ins Unendliche rücken; dazu muss man über der Diagonale AB (Fig. 31) ein Parallelogramm ALBN zeichnen; die andere Diagonale LN geht durch C; also liegt D unendlich ferne.

Fig. 31.

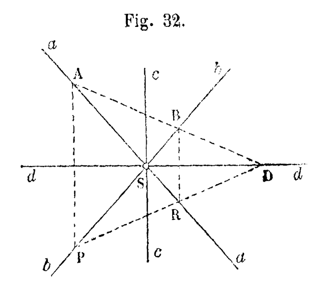


Sind umgekehrt die Punkte A, B, D gegeben und liegt der dritte D unendlich ferne, so können wir wieder über der Diagonale AB ein Parallelogramm ALBN zeichnen; der vierte Punkt C, der D zugeordnet ist, muss im Durchschnitt der gegebenen Geraden mit LN liegen, es muss also der Mittelpunkt von AB sein.

Wenn also von vier harmonischen Punkten ABCD der Punkt C in der Mitte zwischen den zwei zugeordneten Punkten A und B liegt, so ist der vierte unendlich ferne und umgekehrt, wenn einer der Punkte unendlich ferne liegt, so ist der zugeordnete Punkt in der Mitte zwischen den beiden andern.

53. In Fig. 32 sei c die Halbirungslinie des Winkels ab (Nr. 51 rechts). Nimmt man Q unendlich ferne auf c, so werden

Fig. 32.

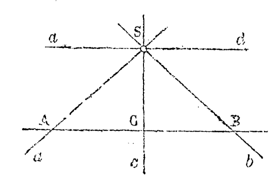


die Segmente AB, PR gleich und liegen zwischen den Parallelen AP und BR; folglich wird der Strahl d senkrecht auf c, d. h. sind vier Strahlen a, b, c, d harmonisch und halbirt der

eine Strahl c den von den beiden andern zugeordneten Strahlen gebildeten Winkel, so ist der vierte Strahl senkrecht auf c.

Umgekehrt, wenn in einem harmonischen Büschel $a\,b\,c\,d$ (Fig. 33) zwei zugeordnete Strahlen c und d auf einander senkrecht stehen, so halbiren sie die Winkel, welche die beiden an-

Fig. 33.



dern Strahlen a und b mit einander bilden. Denn, schneidet man den Büschel (dessen Centrum in S liegt) durch eine Transversale (A B) parallel d, so gibt der Schnitt A B C D vier harmonische Punkte (Nr. 41), und da D unendlich ferne liegt, so muss C in der Mitte zwischen A und B sein (Nr. 52); folglich ist A S B ein gleichschenkliges Dreieck und S C die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze.

§ 9. **Doppelverhältnisse.**

54. Nehmen wir wieder Fig. 2 auf; diese veranschaulicht die Projection der Punkte einer Geraden a auf eine andere Gerade a', aus einem Centrum S und suchen wir die Relation, die zwischen zwei entsprechenden Segmenten A B, A′ B′ besteht.

Die ähnlichen Dreiecke SA J, A′S I′ geben

$$^{*)}\ JA : JS = I'S : I'A';$$

ebenso geben die ähnlichen Dreiecke S B J, B′ S I′

$$JB : JS = I'S : I'B'$$

daraus

$$JA \,.\, I'A' = JB \,.\, I'B' = JS \,.\, I'S$$

*) Wir setzen voraus, dass in allen Gleichungen zwischen Strecken die Zeichenregel beobachtet werde, nach welcher A B und B A gleiche und entgegengesetzte Grössen sind; sind also A, B, O drei Punkte einer Geraden, so hat man

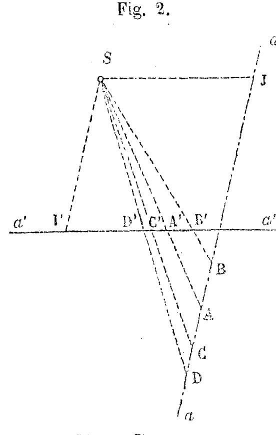
$$AB + BO + OA = 0 \text{ oder } AB = OB - OA.$$

Siehe Baltzer, II. Bd. S. 105.



d. h. das Rechteck J A . I′ A′ ist constant für jedes Paar entsprechender Punkte A und A′.

Fig. 2.



Bezeichnet man die Constante J S . I′ S mit k, so haben wir

$$\mathrm{I'A'} = \frac{k}{\mathrm{JA}}, \quad \mathrm{I'B'} = \frac{k}{\mathrm{JB}},$$

daraus die Differenz

$$\mathrm{I'B'} - \mathrm{I'A'} = \frac{k\,(\mathrm{JA} - \mathrm{JB})}{\mathrm{JA}\,.\,\mathrm{JB}};$$

es ist aber $\mathrm{I'B'} - \mathrm{I'A'} = \mathrm{A'B'}$, $\mathrm{JA} - \mathrm{JB} = \mathrm{BA} = -\mathrm{AB}$, folglich

$$\mathrm{A'B'} = \frac{-k}{\mathrm{JA}\,.\,\mathrm{JB}} \cdot \mathrm{AB}.$$

Betrachten wir vier Punkte A, B, C, D (Fig. 34) der Geraden a und die vier Projectionen A′, B′, C′, D′, so erhalten wir auf analoge Art:

$$\mathrm{A'C'} = \frac{-k}{\mathrm{JA}\,.\,\mathrm{JC}} \cdot \mathrm{AC},$$

$$\mathrm{B'C'} = \frac{-k}{\mathrm{JB}\,.\,\mathrm{JC}} \cdot \mathrm{BC},$$

$$\mathrm{A'D'} = \frac{-k}{\mathrm{JA}\,.\,\mathrm{JD}} \cdot \mathrm{AD},$$

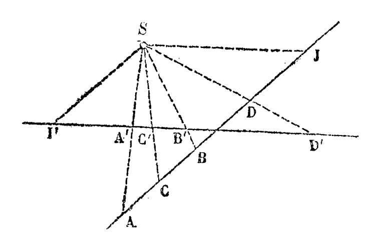
$$\mathrm{B'D'} = \frac{-k}{\mathrm{JB}\,.\,\mathrm{JD}} \cdot \mathrm{BD}$$

und durch Division

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

Sind A B C D und A' B' C' D' die Durchschnitte zweier Transversalen s und s' (die nicht in derselben Ebene liegen)

Fig. 34.



mit vier Ebenen α, β, γ, δ, die durch dieselbe Gerade u gehen, d. h. ist A'B'C'D' eine Projection von A B C D aus der Axe u (Nr. 4), so besteht noch dieselbe Gleichung, welche oben für den Fall der Projection aus einem Centrum S bewiesen wurde. Denn schneiden wir die vier Ebenen α, β, γ, δ in A″B″C″D″ durch eine Gerade s'', welche s und s' schneidet, so sind die Geraden AA″, BB″, CC″, DD″ die Schnitte der Ebenen α, β, γ, δ mit der Ebene $s s''$, folglich laufen sie in einem Punkte S zusammen, in welchem die Ebene $s s''$ die Axe u schneidet. Eben so sind A'A″, B'B″, C'C″, D'D″ vier Geraden in der Ebene $s' s''$ und laufen in einem Punkte S' (dem Schnittpunkt der Axe u und der Ebene $s' s''$) der Axe u zusammen.

Folglich ist A″B″C″D″ eine Projection von ABCD aus dem Centrum S und eine Projection von A'B'C'D' aus dem Centrum S'; man hat folglich:

$$\frac{A''C''}{B''C''} : \frac{A''D''}{B''D''} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'}.$$

Die Zahl

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

heisst das Doppelverhältniss der vier Punkte A, B, C, D (einer Geraden).

Mit dem Obigen ist also der Satz bewiesen:

Das Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden wird durch eine beliebige Projection derselben nicht verändert*).

Oder auch:

Zwei projectivische Gruppen von vier Punkten ABCD, A′B′C′D′ (die in geraden Linien liegen) haben gleiche Doppelverhältnisse.

Der Quotient der Ausdrücke für A′C′ und B′C′ gibt

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AJ}{BJ}.$$

In dieser Gleichung ist die zweite Seite das Doppelverhältniss der vier Punkte A, B, C, J; folglich ist die erste Seite das Doppelverhältniss von A′B′C′J′ oder das Doppelverhältniss der vier Punkte A′, B′, C′, J′, von denen der letzte unendlich ferne liegt, ist nichts anderes als das einfache Verhältniss A′C′ : B′C′.

Dies folgt auch aus der Bemerkung: wenn A′ und B′ fest bleiben, indem sich D′ ins Unendliche (auf der Geraden A′B′) entfernt, so hat man

$$\lim. \frac{A'D'}{B'D'} = 1,$$

also

$$\lim. \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{A'C'}{B'C'}.$$

Ebenso hat man unter derselben Voraussetzung

$$\lim. \frac{A'D'}{B'D'} : \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{B'C'}{A'C'},$$

d. h. das Doppelverhältniss der vier Punkte A′, B′, D′, C′, von denen der dritte unendlich ferne liegt, ist gleich dem einfachen Verhältniss B′C′ : A′C′.

Daraus folgt die Auflösung der Aufgabe:

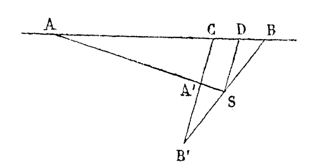
Zu drei gegebenen Punkten A, B, C (einer Geraden) einen vierten Punkt D zu bestimmen, wenn das Dop-

*) Pappus, Mathematicae collectiones (Ausgabe von Comandino, Venedig 1589), Buch VII, S. 129. — Siehe Baltzer, II. Bd. S. 367.

pelverhältniss des Gebildes ABCD eine in Grösse und Vorzeichen gegebene Zahl λ ist (Fig. 35).

Auflösung. Wir ziehen durch C eine beliebige Transversale und tragen darauf, von C aus, zwei Strecken CA' und

Fig. 35.



CB' ab, deren Verhältniss $CA' : CB'$ gleich $\lambda : 1$, dem Werth des gegebenen Doppelverhältnisses, ist; die beiden Strecken CA' und CB' liegen in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung, je nachdem λ positiv oder negativ ist. Wir ziehen die Geraden AA' und BB', ihr Schnittpunkt sei S; die durch S gezogene Parallele zu $A'B'$ schneidet AB in dem gesuchten Punkte D *).

Denn nennen wir D' den unendlich fernen Punkt von $A'B'$, betrachten ABCD als eine Projection von $A'B'C'D'$ aus dem Centrum S, so wird das Doppelverhältniss von ABCD gleich demjenigen von $A'B'C'D'$ oder gleich dem einfachen Verhältniss

$$A'C' : B'C' = \lambda.$$

Das ist die graphische Lösung der Gleichung

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \lambda$$

oder

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} : \lambda = \mu,$$

oder der Aufgabe: einen Punkt D zu finden, der mit zwei gegebenen Punkten A und B zwei Strecken AD, BD (in gerader Linie) gibt, deren Verhältniss gleich einer in Grösse und Vorzeichen gegebenen Zahl ist.

Die vorgelegte Aufgabe lässt also nur eine Auflösung

*) Chasles, Géométrie supérieure (Paris 1852), S. 10.

zu, denn es gibt nur *einen* Punkt, welcher eine gegebene Strecke so theilt, dass Grösse und Zeichen der Theile gegebenen gleich werden. Folglich kann es nicht zwei verschiedene Punkte D und D_1 geben, so dass ABCD, ABCD_1 gleiche Doppelverhältnisse haben. Man kann also sagen:

Wenn die Gruppen ABCD, ABCD_1 gleiche Doppelverhältnisse haben, so muss der Punkt D_1 mit D zusammenfallen.

Wenn zwei Gruppen von vier Punkten ABCD, A′B′C′D′ (jede in gerader Linie) gleiche Doppelverhältnisse haben, so sind sie projectivische Gebilde.

Denn nach Nr. 37 kann man immer von dem Gebilde ABC zu dem Gebilde A′B′C′ (durch eine endliche Anzahl von Projectionen oder Schnitten) übergehen; D″ sei der Punkt, den diese Operationen an der Stelle von D geben. Dann wird das Doppelverhältniss von A′B′C′D″ gleich demjenigen von ABCD und folglich die Doppelverhältnisse von A′B′C′D′ und A′B′C′D″ unter einander gleich sein; also fällt D″ mit D′ zusammen, oder die Gruppen ABCD und A′B′C′D′ sind projectivisch.

Mit andern Worten, die nothwendige und genügende Bedingung dazu, dass zwei Gebilde ABCD und A′B′C′D′ (aus je vier Punkten einer Geraden zusammengesetzt) projectivisch seien, ist die Gleichheit (in Grösse und Vorzeichen) ihrer Doppelverhältnisse.

Das Doppelverhältniss von vier Punkten ABCD wird mit dem Symbol (ABCD) *) bezeichnet; folglich ist die Projectivität zweier Gebilde ABCD und A′B′C′D′ durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Werden zwei Büschel von je vier Strahlen oder Ebenen durch zwei Transversalen in ABCD und A′B′C′D′ geschnitten, so ist die Gleichheit

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

die nothwendige und genügende Bedingung dazu, dass die beiden Büschel projectivisch seien.

*) Möbius, Der barycentrische Calcül, S. 246 (Leipzig 1827).

Wir nennen Doppelverhältniss von vier Strahlen a, b, c, d oder vier Ebenen α, β, γ, δ, die einem Büschel angehören, das Doppelverhältniss der vier Punkte, in welchen die vier Elemente des Büschels von einer beliebigen Transversalen geschnitten werden und stellen dieses Doppelverhältniss des Strahlen- oder Ebenenbüschels durch (a, b, c, d) oder $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dar.

Wir können dann den allgemeinen Lehrsatz so ausdrücken:

Zwei Gebilde der ersten Stufe, die aus je vier Elementen bestehen, sind projectivisch, wenn ihre Doppelverhältnisse gleich sind; die Bedingung genügt.

55. Da zwei harmonische Gebilde immer projectivisch sind (Nr. 44), so können wir aus dem vorhergehenden Satze schliessen, dass das Doppelverhältniss von vier harmonischen Elementen eine constante Zahl ist. Denn wenn A B C D ein harmonisches Gebilde ist, so ist auch B A C D ein harmonisches Gebilde (Nr. 46) und die beiden Gebilde A C B D und B C A D sind projectivisch *) oder es ist

$$(ACBD) = (BCAD)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{BA}{CA} : \frac{BD}{CD};$$

daraus nach einigen Umformungen:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1,$$

oder

$$(ABCD) = -1;$$

also ist das Doppelverhältniss von vier harmonischen Elementen gleich der negativen Einheit *1).

56. Man kann der Gleichung

$$(ABCD) = -1,$$

*) Projicirt man Fig. 28 A C B D aus K auf N C, so erhält man L C N Q, und hierauf L C N Q aus M auf A D, so erhält man B C A D

*1) Möbius, loc. cit., S. 269.

oder

$$\frac{AC}{BC} + \frac{AD}{BD} = 0, \quad (1)$$

welche ausdrückt, dass die vier Punkte ABCD harmonisch sind, noch zwei andere bemerkenswerthe Formen geben.

Da $AD = CD - CA$ (Nr. 45), $BD = CD - CB$, so gibt die Gleichung (1)

$$CA(CD - CB) + CB(CD - CA) = 0$$

oder

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{CA} + \frac{1}{CB}\right) \quad (2)$$

eine Formel, welche den Punkt D gibt, wenn die Punkte A, B, C gegeben sind.

Ist O die Mitte der Strecke CD oder $OD = CO = -OC$, so wird

$$AC = OC - OA;\ AD = OD - OA = -(OC + OA);$$
$$BC = OC - OB,\ BD = -(OC + OB).$$

Die Gleichung (1) oder auch

$$\frac{AC}{AD} + \frac{BC}{BD} = 0$$

wird

$$\frac{OC - OA}{OC + OA} = \frac{OB - OC}{OB + OC}$$

oder

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OC};$$

also

$$\overline{OC}^2 = OA \, . \, OB, \quad (3)$$

oder:

Die Hälfte der Strecke CD ist die mittlere Proportionale zwischen den Abständen der Punkte A und B von der Mitte von CD.

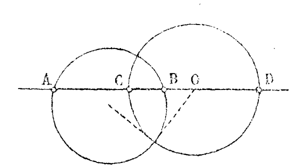
Die Gleichung (3) zeigt, dass die Strecken OA und OB das gleiche Vorzeichen haben, d. h. dass der Punkt O niemals zwischen A und B fällt.

Daraus folgt: Legt man durch A und B einen Kreis (Fig. 36), so ist OC die Länge der Tangente, welche aus dem Punkte O an diesen Kreis gelegt wird *). Folglich schneidet der Kreis

*) Baltzer, Planim., S. 117.

über dem Durchmesser C D den ersten Kreis (d. h. alle durch A und B gehenden Kreise) rechtwinklig. Umgekehrt: Schneiden sich zwei Kreise rechtwinklig, so schneiden sie eine beliebige

Fig. 36.



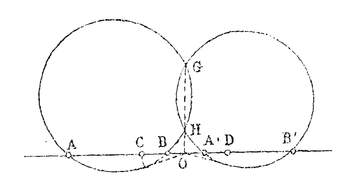
Gerade, die durch den Mittelpunkt des einen Kreises geht, in vier harmonischen Punkten *).

Die nämliche Formel (3) dient dazu, folgende Aufgabe zu lösen:

Zwei Punktenpaare A B und A′ B′ sind gegeben, ein anderes Paar C D so zu bestimmen, dass die beiden Gruppen A B C D und A′ B′ C D harmonisch seien (Fig. 37 und 38).

Wir nehmen einen beliebigen Punkt G ausserhalb der Geraden und beschreiben die Kreise G A B und G A′ B′; ihr Schnitt-

Fig. 37.



punkt sei H. Wir ziehen G H *1) bis zum Durchschnitt O mit der Geraden A B′, im ersten Kreise haben wir *2)

$$OA \,.\, OB = OG \,.\, OH,$$

im zweiten Kreise

$$OA' \,.\, OB' = OG \,.\, OH,$$

folglich

$$OA \,.\, OB = OA' \,.\, OB'.$$

O ist also die Mitte der gesuchten Strecke; die Punkte C und D sind die Schnittpunkte der gegebenen Geraden mit dem

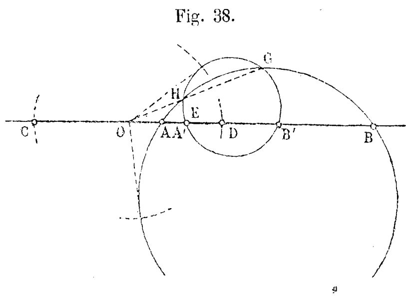
*) Baltzer, II. Bd. S. 370.

*1) G H ist die Chordale der beiden Kreise. Baltzer, Planim., S. 113.

*2) Baltzer, Planim., S. 117.

um O beschriebenen Kreise, dessen Radius gleich der Länge der beiden gleichen Tangenten ist, die von O aus an die beiden ersten Kreise gezogen werden.

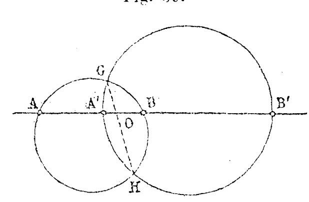
Fig. 38.



Die Aufgabe lässt eine reelle Lösung zu, wenn O ausserhalb der beiden Strecken A B und A' B' und folglich ausserhalb der beiden Kreise fällt (Fig. 37 und 38). Es gibt keine reelle Lösung, wenn das Punktenpaar A B durch das Paar A' B' getrennt ist (Fig. 39); in diesem Falle ist der Punkt O im Innern der beiden Strecken.

Setzen wir voraus, A, B, C, D seien vier harmonische Punkte, von denen A und B einander unendlich nahe sind oder zusammen

Fig. 39.



fallen. Ist C in unendlicher Entfernung, so muss D mit A und B zusammenfallen, weil er in der Mitte dieser beiden Punkte liegen muss (Nr. 52). Ist C in endlicher Entfernung und beliebig gestellt, doch so, dass er weder mit A noch mit B zusammen fällt, so gibt die Gleichung (2) $CD = CA = CB$, d. h. D fällt mit A und B zusammen.

Setzen wir voraus, dass A und C zusammenfallen und B unendlich ferne liege. Jetzt muss A in der Mitte der Strecke C D liegen, folglich fällt D mit A und C zusammen. Ist B in endlicher Entfernung und beliebig gestellt, doch so, dass er weder mit A noch mit C zusammenfällt, so gibt Gleichung (1) $AD = o$, d. h. der Punkt D fällt mit A und C zusammen.

Wenn also von den vier harmonischen Punkten zwei zusammenfallen, so fällt auch einer der beiden anderen mit ihnen zusammen und der vierte ist unbestimmt.

57. Der Lehrsatz der Nr. 38 führt auf die Thatsache: Sind vier Elemente A, B, C, D eines Gebildes der ersten Stufe gegeben, so sind folgende Doppelverhältnisse gleich:

$$(A\,B\,C\,D) = (B\,A\,D\,C) = (C\,D\,A\,B) = (D\,C\,B\,A).$$

Vier Elemente (eines Gebildes der ersten Stufe) können auf vierundzwanzig verschiedene Arten permutirt oder in vierundzwanzig verschiedene Gruppen gebracht werden:

A B C D,	B A D C,	C D A B,	D C B A,
A B D C,	B A C D,	D C A B,	C D B A,
A C B D,	C A D B,	B D A C,	D B C A,
A C D B,	C A B D,	D B A C,	B D C A,
A D B C,	D A C B,	B C A D,	C B D A,
A D C B,	D A B C,	C B A D,	B C D A,

welche wir auf sechs Linien vertheilt haben. Die Gruppen einer jeden Linie sind zu einander projectivisch (Nr. 38) und haben folglich dasselbe Doppelverhältniss. Will man die Doppelverhältnisse der vierundzwanzig Gruppen bestimmen, so genügt es, aus jeder Linie eine Gruppe, z. B. die sechs Gruppen der ersten Kolonne zu betrachten. Diese sechs Gruppen sind so von einander abhängig, dass, wenn man eine von ihnen kennt, auch die fünf anderen sogleich bestimmt werden können.

Betrachten wir die beiden Gruppen A B C D und A B D C, welche man durch die Vertauschung der beiden letzten Elemente erhält.

Die beiden Doppelverhältnisse

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{A\,C}{B\,C} : \frac{A\,D}{B\,D} \text{ und}$$

$$(A\,B\,D\,C) = \frac{A\,D}{B\,D} : \frac{A\,C}{B\,C}$$

sind reciproke Werthe, also:

$$(1) \qquad (A\,B\,C\,D)\,(A\,B\,D\,C) = 1;$$

ebenso

$$(1)' \qquad (A\,C\,B\,D)\,.\,(A\,C\,D\,B) = 1;$$

$$(1)'' \qquad (A\,D\,B\,C)\,(A\,D\,C\,B) = 1.$$



Sind die vier Punkte A, B, C, D in gerader Linie, so hat man die identische Gleichung

$$BC\,.\,AD + CA\,.\,BD + AB\,.\,CD = 0\ ^{*)};$$

dividirt man durch $BC\,.\,AD$, so hat man

$$\frac{AC\,.\,BD}{BC\,.\,AD} + \frac{AB\,.\,CD}{CB\,.\,AD} = 1,$$

oder

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} + \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = 1,$$

in anderer Form (Nr. 54)

(2) $$(A\,B\,C\,D) + (A\,C\,B\,D) = 1;$$

ebenso bekommt man

(2)′ $$(A\,B\,D\,C) + (A\,D\,B\,C) = 1, \text{ und}$$

(2)″ $$(A\,C\,D\,B) + (A\,D\,C\,B) = 1.$$

Bezeichnen wir mit λ das Doppelverhältniss der Gruppe ABCD, d. h. setzen wir

$$(A\,B\,C\,D) = \lambda,$$

so haben wir nach Formel (1)

$$(A\,B\,D\,C) = \frac{1}{\lambda},$$

und nach Formel (2)

$$(A\,C\,B\,D) = 1 - \lambda;$$

daraus folgt, nach (1)′

$$(A\,C\,D\,B) = \frac{1}{1-\lambda},$$

und nach (2)″

$$(A\,D\,C\,B) = 1 - \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1};$$

und endlich, nach (1)″ und (2)′

$$(A\,D\,B\,C) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.\ ^{*1)}$$

---

*) Multipliciren wir die identische Gleichung

$$BC + CA + AB = 0$$

mit AD und berücksichtigen, dass

$$AD = BD + AB \text{ und } AD = CD - CA,$$

so bekommen wir

$$BC\,.\,AD + CA\,(BD + AB) + AB\,(CD - CA) = 0,$$

woraus

$$BC\,.\,AD + CA\,.\,BD + AB\,.\,CD = 0.$$

*1) Möbius, loc. cit., S. 249.

Wenn in der Gruppe A B C D zwei Punkte A und B zusammenfallen, so hat man

$$AC = BC,\ AD = BD,\ \text{folglich}\ (ABCD) = (AACD) = 1;$$

wenn aber $\lambda = 1$, so werden die andern Doppelverhältnisse

$$(ACAD) = 1 - 1 = 0,\ (ACDA) = \infty,$$

d. h. wenn von vier Elementen zwei zusammenfallen, so hat ihr Doppelverhältniss die Werthe 1, o, ∞.

Ist $(ABCD) = -1$, d. h. ist das Gebilde A B C D harmonisch, so geben die obigen Formeln

$$(ACBD) = 1 - (-1) = 2,$$
$$(ACDB) = \frac{1}{2};$$

wenn also (Nr. 54) das Doppelverhältniss von vier Punkten einen der Werthe 2 oder $\frac{1}{2}$ hat, so bilden diese Punkte, in einer anderen Aufeinanderfolge, eine harmonische Gruppe.

58. Aus dem Lehrsatz 54, welcher die Bedingung ausdrückt, die für die Projectivität zweier Gruppen von je vier Elementen erforderlich ist und genügt, schliesst man:

Wenn zwei Gebilde (der ersten Stufe) projectivisch sind, so haben vier beliebige Elemente des einen Gebildes und die vier entsprechenden Elemente des andern gleiche Doppelverhältnisse *).

Insbesondere: vier harmonischen Elementen des einen Gebildes entsprechen vier harmonische Elemente des anderen (Nr. 44).

59. Mögen A A′ und B B′ zwei beliebige Paare von entsprechenden Punkten zweier projectivischer Punktreihen (Fig. 40) und I, J′ ihre unendlich fernen Punkte sein, so haben wir die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(ABIJ) = (A'B'I'J')$$

*) Steiner, Systematische Entwickelung etc., §10 S. 33 (Berlin 1832), oder Jacob Steiner's Gesammelte Werke, herausgegeben von Weierstrass, Berlin 1881.

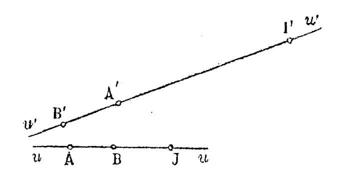
oder (Nr. 57)

$$(B\,A\,J\,I) = (A'\,B'\,I'\,J')$$

oder auch, weil I und J' unendlich ferne liegen (Nr. 53),

$$B\,J : A\,J = A'\,I' : B'\,I',$$

Fig. 40.



woraus man schliesst:

$$J\,A\,.\,I'\,A' = J\,B\,.\,I'\,B',$$

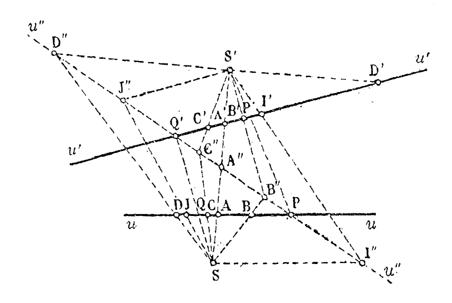
d. h. das Produkt J A . I' A' hat für alle Paare der entsprechenden Punkte einen constanten Werth*).

(Siehe Nr. 54, wo dieser Satz für zwei perspectivische Punktreihen bewiesen wurde.)

§. 10. Constructionen projectivischer Gebilde.

60. Es seien A B C und A' B' C' zwei Ternen entsprechender Elemente von zwei projectivischen Gebilden erster

Fig. 41.



Stufe (Fig. 41) mit einem beliebigen System von Operationen (Projectionen und Schnitten), durch welche man von A B C zu A' B' C' übergeht; dasselbe System wird auch von einem

---

*) Steiner, loc. cit., S. 40, § 12.

beliebigen anderen Elemente D des ersten Gebildes zu dem entsprechenden Elemente D′ des zweiten führen. Denn könnte D mit diesen Operationen ein anderes Element D″ geben, so wären die beiden Doppelverhältnisse (A B C D) und (A′ B′ C′ D″) gleich; nach Voraussetzung hat man

$$(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D');$$

folglich wäre

$$(A'\,B'\,C'\,D') = (A'\,B'\,C'\,D'');$$

das ist unmöglich, wenn nicht D″ mit D′ zusammenfällt (Nr. 54).

In Fig. 41 sind die Operationen: eine Projection aus S, ein Schnitt durch u'', eine Projection aus S′ und ein Schnitt durch u'.

61. Es ist ebenso leicht, die Umkehrung zu dem Satze Nr. 54 zu beweisen; d. h.

Sind zwei Gebilde der ersten Stufe gegeben und entsprechen den Elementen A, B, C, D... des einen in derselben Reihenfolge die Elemente A′, B′, C′, D′... des andern in der Weise, dass vier beliebige Elemente des ersten Gebildes und die vier entsprechenden Elemente des andern gleiche Doppelverhältnisse haben, so sind die beiden Gebilde projectivisch.

Denn jedes System von Operationen, das von der Terne A B C zur Terne A′ B′ C′ führt, leitet auch von dem Element D zu einem Element D″, so dass

$$(A\,B\,C\,D) = (A'B'C'D'');$$

nach Voraussetzung aber ist

$$(A\,B\,C\,D) = (A'B'C'D'),$$

also auch

$$(A'B'C'D') = (A'B'C'D'');$$

folglich fällt D″ mit D′ zusammen (Nr. 54). Da derselbe Schluss für jedes andere Paar entsprechender Elemente wahr bleibt, so ist bewiesen, dass die beiden Gebilde projectivisch sind (Nr. 34).

62. Aus Nr. 60 folgt als specieller Fall:

Wenn zwei projectivische Gebilde der ersten Stufe zwei entsprechende Ternen A B C und A′ B′ C′

enthalten, die perspectivisch sind, so sind auch die beiden gegebenen Gebilde perspectivisch.

Sind z. B. die beiden Gebilde zwei Punktreihen A B C D... und A' B' C' D'..., so ist mit der Voraussetzung angenommen, dass die Geraden A A', B B', C C' in einem Punkte O zusammenlaufen, folglich gehen auch die andern analogen Geraden D D'... durch O (Fig. 17 und 34).

Als speciellen Fall setzen wir voraus, dass die Punkte A und A' (Fig. 20) zusammenfallen, indem sie einen entsprechend gemeinschaftlichen Punkt bilden *). Die Ternen A B C und A' B' C' sind perspectivisch und der Schnittpunkt von B B' und C C' ist ihr Projectionscentrum; wenn also zwei projectivische Punktreihen einen entsprechend gemeinschaftlichen Punkt haben, so sind sie perspectivisch.

Umgekehrt ist klar, dass zwei perspectivische Punktreihen immer einen entsprechend gemeinschaftlichen Punkt haben.

Sind die beiden Gebilde zwei Strahlenbüschel $a\,b\,c\,d\ldots$ und $a'\,b'\,c'\,d'\ldots$ in derselben Ebene, so ist mit der Voraussetzung angenommen, dass die drei Punkte $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$ auf einer Geraden s liegen, also fallen auch die anderen analogen Punkte $d\,d'\ldots$ auf dieselbe Gerade (Fig. 18). Liegt die ganze Gerade s unendlich ferne, so erhält man folgende Eigenschaft:

Sind in zwei projectivischen Strahlenbüscheln drei Paare entsprechender Strahlen parallel, so sind auch zwei beliebige andere entsprechende Strahlen parallel.

Die Voraussetzung wird in dem Falle verificirt, wo die Strahlen a und a' in einen entsprechend gemeinschaftlichen Strahl (Fig. 42) zusammenfallen; dann ist die Gerade s die Verbindung der Punkte $b\,b'$ und $c\,c'$.

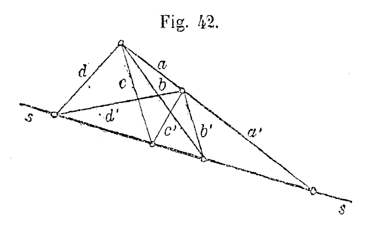
Wenn also zwei projectivische Strahlenbüschel (in derselben Ebene) einen entsprechend gemeinschaftlichen Strahl haben, so sind sie perspectivisch.

---

*) In zwei projectivischen Gebilden nennen wir ein entsprechend gemeinschaftliches oder vereinigtes Element ein solches, das mit seinem entsprechenden zusammenfällt.

Umgekehrt haben zwei perspectivische Strahlenbüschel (in derselben Ebene) immer einen vereinigten Strahl.

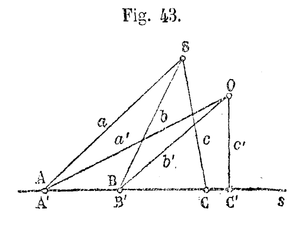
Fig. 42.



Ist eines der Gebilde eine Punktreihe A B C D . . ., das andere ein Strahlenbüschel $a\,b\,c\,d$ . . . (Fig. 26), so ist mit der Voraussetzung angenommen, dass die Strahlen $a\,b\,c$ durch die Punkte A B C gehen; folglich geht auch d durch den Punkt D, . . . etc.

63. Zwei Punktreihen können auf derselben Geraden liegen, oder sie sind übereinander liegende; werden z. B. zwei Strahlenbüschel (in derselben Ebene) S $\equiv a\,b\,c$ . . . und O $\equiv a'\,b'\,c'$ . . . (Fig. 43) durch dieselbe Gerade geschnitten, so enthält diese die beiden Punktreihen A B C . . . A′ B′ C′ . . .,

Fig. 43.

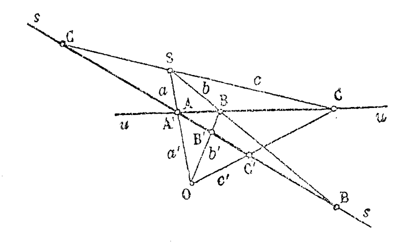


die projectivisch sein werden, wenn es die beiden Büschel sind. Man kann sich in diesem Falle fragen, ob es entsprechend gemeinschaftliche Punkte gibt, d. h. ob zwei entsprechende Punkte der beiden Punktreihen in irgend einem Punkte der Transversalen zusammenfallen.

Zieht man z. B. die Transversale s durch die Punkte $a\,a'$ und $b\,b'$, so coincidiren die Punkte A und A′, ebenso B und B′; es hat also in diesem Falle zwei entsprechend gemeinschaftliche Punkte. Projicirt man eine Punktreihe u (Fig. 44) aus zwei Centren S und O (die mit u in derselben Ebene

liegen), so hat man zwei Strahlenbüschel $a\,b\,c\ldots$ und $a'\,b'\,c'\ldots$, zieht man hierauf eine Transversale s durch den Punkt, in welchem der entsprechend gemeinschaftliche Strahl $a\,a'$ von

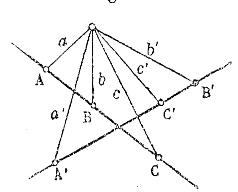
Fig. 44.



u geschnitten wird, so erhält man (auf s) die beiden projectivisch übereinanderliegenden Punktreihen A B C ... und A′ B′ C′ ..., die einen einzigen entsprechend gemeinschaftlichen Punkt A A′ haben.

Auf ähnliche Art können zwei Strahlenbüschel (in einerlei Ebene) concentrisch sein; das ist dann der Fall, wenn man zwei verschiedene Punktreihen aus demselben Centrum projicirt (Fig. 45); zwei Ebenenbüschel können dieselbe Axe haben, wenn man aus derselben Axe zwei verschiedene Punkt-

Fig. 45.



reihen oder aus verschiedenen Mittelpunkten einen Strahlenbüschel projicirt etc.

Schneidet man zwei Bündel durch dieselbe Ebene, so erhält man zwei übereinanderliegende ebene Gebilde; projicirt man zwei ebene Gebilde aus demselben Centrum, so erhält man zwei concentrische Bündel. In allen diesen Fällen sind die fraglichen Gebilde übereinanderliegend und das Aufsuchen ihrer entsprechend gemeinschaftlichen Elemente ist, wenn sie projectivisch sind, von grosser Wichtigkeit.

64. **Lehrsatz.** Zwei projectivische, übereinander liegende Gebilde (der ersten Stufe) haben entweder höchstens **zwei,** oder **alle** ihre Elemente entsprechend gemein.

Beweis. Hätte es drei entsprechend gemeinschaftliche Elemente A, B, C und wären D und D′ irgend zwei andere entsprechende Elemente, so hätte man (nach Nr. 58) die Gleichheit

$$(A\,B\,C\,D) = (A\,B\,C\,D'),$$

folglich (Nr. 54) würde D mit D′ coincidiren. Wenn also die beiden Gebilde nicht identisch sind, so können sie nicht mehr als zwei vereinigte Elemente haben.

65. Ist ein aus vier Elementen A B C D zusammengesetztes Gebilde (der ersten Stufe) zu einem zweiten Gebilde projectivisch, das aus dem ersten abgeleitet wird, indem man zwei Elemente vertauscht, z. B. zu B A C D, so behaupte ich, dass das Gebilde harmonisch ist und dass die beiden vertauschten Elemente zugeordnete sind. Dieser Satz ist schon in Nr. 55 eingeschlossen *); wir können aber auch folgenden graphischen Beweis davon geben:

Setzen wir z. B. voraus, A, B, C, D seien vier Punkte einer Geraden (Fig. 46); K M Q D sei eine Projection dieser Punkte aus einem beliebigen Centrum L auf eine durch D

Fig. 46.

gehende Gerade. A B C D ist projectivisch zu K M Q D und (nach Voraussetzung) auch zu B A C D, folglich sind auch die Gebilde K M Q D und B A C D projectivisch. Da aber D ein entsprechend gemeinschaftlicher Punkt dieser Gebilde ist, so

*) Denn: ist $a : b = \lambda$, so ist $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \frac{1}{\lambda}$.

sind sie perspectivisch (Nr. 62) und die Geraden K B, M A, Q C schneiden sich in demselben Punkte N. Daraus folgt, dass K L M N ein vollständiges Viereck ist, in welchem zwei Gegenseiten in A, zwei andere Gegenseiten in B convergiren, während die fünfte und sechste Seite beziehlich durch C und D gehen. Folglich sind (Nr. 39) A, B, C, D vier harmonische Punkte.

66. Da der Uebergang von einem Gebilde zu einem andern projectivischen Gebilde (der ersten Stufe) immer durch ein System von Operationen ausgeführt werden kann, welches dazu dient, drei Elemente des einen aus den drei entsprechenden Elementen des andern (Nr. 60) abzuleiten, und da zwei gegebene Gruppen von je drei Elementen immer projectivisch sind, d. h. immer mit Hülfe einiger Projectionen und Schnitte aus einander abgeleitet werden können, so dürfen wir schliessen:

Sind drei beliebige Paare entsprechender Elemente von zwei projectivischen Gebilden gegeben, so kann man eine beliebige Anzahl anderer Paare entsprechender Elemente construiren.

Wir geben zwei Beispiele, das eine von zwei Punktreihen, das andere von zwei Strahlenbüscheln; es ist vorausgesetzt, dass im einen wie im andern Fall die beiden Gebilde in derselben Ebene liegen.

In Fig. 47 seien A und A′, B und B′, C und C′ die drei gegebenen Paare entsprechender Punkte der projectivischen Punktreihen u und u', welche zu construiren sind.

Wir operiren nun so, wie wir es in Nr. 37 gemacht haben; auf der Geraden, welche zwei entsprechende Punkte, z. B. A und A′ verbindet, nehmen wir zwei beliebige Punkte S und S′; ziehen S B und S′ B′, die sich in B″ schneiden und

In Fig. 48 seien a und a', b und b', c und c' die drei gegebenen Paare entsprechender Strahlen der projectivischen Strahlenbüschel U und U′, welche zu construiren sind.

Durch den Schnittpunkt zweier entsprechender Strahlen, z. B. $a\,a'$ ziehen wir beliebig zwei Transversalen s und s'; b'' sei die Verbindungslinie der Punkte $s\,b$ und $s'\,b'$; c'' sei die Verbindungslinie der Punkte $s\,c$ und

S C und S′ C′, die sich in C″ schneiden. A″ sei der Punkt, in welchem sich A A′ und B″ C″ schneiden. Die Operationen, welche dazu dienen, von A B C auf A′ B′ C′ überzugehen, sind:

$s' c'$, a'' die Verbindungslinie der Punkte $a\,a'$ und $b''\,c''$. Die Operationen, welche dazu dienen, von $a\,b\,c$ auf $a'\,b'\,c'$ zu gelangen, sind:

Fig. 47.

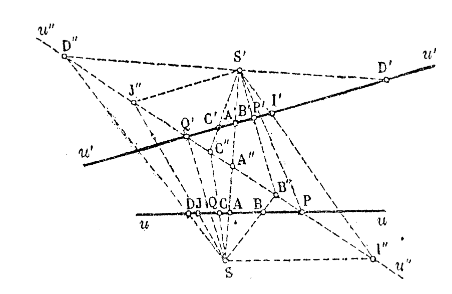
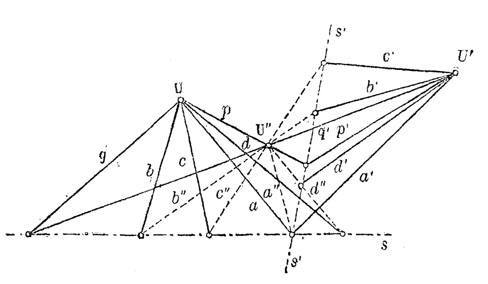


Fig. 48.



1. Die Projection aus S; 2. der Schnitt durch u''; $u'' \equiv$ A″ B″ C″; 3. die Projection aus S′; 4. der Schnitt durch u'. Dieselben Operationen führen von einem beliebigen anderen Punkte D auf u zu dem entsprechenden Punkte D′ auf u', oder die Strahlen S D und S′ D′ müssen sich in einem Punkte D″ der festen Geraden u'' schneiden.

1. der Schnitt durch s; 2. die Projection aus dem Punkt U″, dem Schnittpunkt von $a''\,b''\,c''$; 3. der Schnitt durch s'; 4. die Projection aus U′. Dieselben Operationen führen von einem beliebigen Strahl d des Büschels U zu dem entsprechenden Strahl d' des Büschels U′; oder die Punkte $s\,d$ und $s'\,d'$ müssen auf einer Geraden d'' liegen, welche durch den festen Punkt U″ geht.

Auf diese Weise erhält man eine Punktreihe $u'' \equiv A''B''C''D''\ldots$, die sowohl zu u als zu u' perspectivisch ist.

Auf diese Weise erhält man einen Büschel $U'' \equiv a''b''c''d''\ldots$, der sowohl zu U als zu U′ perspectivisch ist.

In Fig. 47 schneidet der durch S gehende Strahl, der parallel u ist, die Gerade u'' in I″, der Strahl S′I″ schneidet u' im Punkte I′, dessen entsprechender auf u unendlich ferne liegt. Ebenso schneidet der durch S′ gehende Strahl, der u' parallel geht, die Gerade u'' in J″ und der Strahl S J″ schneidet u im Punkte J, dessen entsprechender auf u' unendlich ferne liegt.

Ist P (Fig. 47) der Punkt, in welchem u von u'' geschnitten wird, so ist P′ der Schnittpunkt von u' und dem Strahl S′ P. Ebenso: wenn Q′ der Punkt ist, wo u' von u'' geschnitten wird, so ist Q der Schnittpunkt von u und S Q′.

Nennen wir p (Fig. 48) den Strahl U U″, so verbindet der entsprechende Strahl p' die Punkte U′ und $s'p$. Ebenso: wenn der Strahl U′ U″ mit q' bezeichnet wird, so verbindet der Strahl q die Punkte U und $s\,q'$.

67. Die Mittelpunkte S und S′ sollen mit zwei entsprechenden Punkten auf derselben Geraden liegen, im Uebrigen sind sie beliebig. Wir können z. B. S auf A′ und S′ auf A legen (Fig. 49). Dann coincidirt der Strahl S′ P mit u und P′ wird folglich der Schnittpunkt von u und u' sein. Ebenso coincidirt der Strahl S Q′ mit u' und Q fällt auch in den Punkt $u\,u'$.

Die Transversalen s und s' sollen durch den Schnittpunkt zweier entsprechender Strahlen gehen, im Uebrigen sind sie beliebig. Wir können z. B. a' an der Stelle von s und a an der Stelle von s' nehmen (Fig. 50). Dann coincidirt der Punkt $s'p$ mit U; folglich ist p' die Gerade U′ U. Ebenso coincidirt der Punkt $s\,q'$ mit U′ und q ist nichts anderes als die Gerade U U′.

Nehmen wir also die Punkte A und A′ an der Stelle der Centren S und S′, so schneidet die Gerade u'' die beiden Geraden u und u' beziehlich in P und Q′, welche dem Punkte $u\,u'$ entsprechen, der das einemal als P′ der Linie u', das andere-

Nehmen wir also die Strahlen a' und a an der Stelle der Transversalen s und s', so ist der Punkt U″ der Durchschnitt der Strahlen p und q', welche der Geraden U U′ entsprechen, die das einemal als Strahl p' des Büschels U′, das anderemal als

mal als Q der Linie u angesehen wird.

In der Construction der vorhergehenden Nummer war aber die Gerade u'' der Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen der perspectivischen Büschel

S(ABCD...) und S′(A′B′C′D′...).

Die Gerade u'', die wir hier erhalten, ist ebenfalls der gemeinsame Schnitt der Büschel

A′(ABCD...) und A(A′B′C′D′...),

d. h. der Ort der Punkte, in denen sich die Linienpaare A′B und AB′, A′C und AC′, A′D und AD′... schneiden.

Strahl q des Büschels U angesehen wird.

In der Construction der vorhergehenden Nummer war aber der Punkt U″ das Projectionscentrum der perspectivischen Punktreihen

s $(a\,b\,c\,d\dots)$ und s' $(a'\,b'\,c'\,d\dots)$.

Der Punkt U″, den wir hier erhalten, ist ebenfalls Projectionscentrum der Punktreihen

a' $(a\,b\,c\,d\dots)$ und a $(a'\,b'\,c'\,d'\dots)$,

d. h. der Schnittpunkt der Geraden, welche die Punktenpaare $a'\,b$ und $a\,b'$, $a'\,c$ und $a\,c'$, $a'\,d$ und $a\,d'$... verbinden.

Fig. 49.

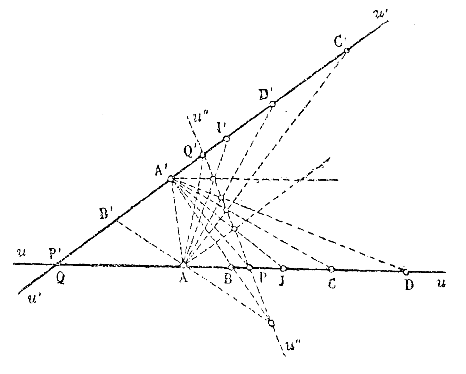
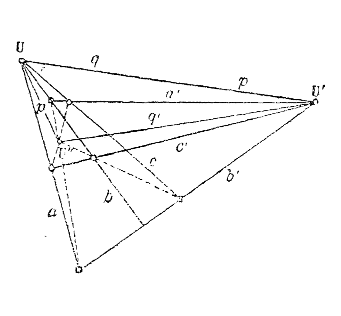


Fig. 50.



Nehmen wir statt der Punkte A′A zwei andere Punkte B′ und B oder C′ und C... als Projectionscentren, so muss noch immer die Gerade u'' die beiden Linien u und u' in den Punkten P und Q′ schneiden, d. h. die Gerade u'' bleibt dieselbe.

Nehmen wir statt der Strahlen $a'\,a$ zwei andere Strahlen b' und b oder c' und c... als Transversalen, so muss noch immer der Punkt U″ der Durchschnitt der Strahlen p und q' sein, d. h. der Punkt U″ bleibt derselbe.

Sind also A B C ... M N ... und A′ B′ C′ ... M′ N′ ... zwei projectivische Punktreihen (in derselben Ebene), so schneiden sich alle Linienpaare, die den Geraden M N′ und M′ N analog sind, in Punkten, die einer festen Geraden angehören. Diese Gerade geht durch diejenigen Punkte der Punktreihen, welche ihrem Durchschnittspunkte entsprechen.

Sind also $a\,b\,c \ldots m\,n \ldots$ und $a'\,b'\,c' \ldots m'\,n' \ldots$ zwei projectivische Strahlenbüschel (in derselben Ebene), so gehen alle Geraden, welche die den Punkten $m\,n'$ und $m'\,n$ analogen Punktenpaare verbinden, durch einen festen Punkt, welcher der Schnittpunkt derjenigen Strahlen ist, die der Verbindungslinie der Büschelmittelpunkte entsprechen.

68. Sind die beiden Punktreihen u und u' perspectivisch (Fig. 51), so coincidiren die Punkte P und Q′ mit dem Schnittpunkte O der beiden Geraden (u, u'); und da der gerade Ort der Punkte (A B′, A′ B), (A C′, A′ C), (A D′, A′ D) ... und der gerade Ort der Punkte (B A′, B′ A), (B C′, B′ C), (B D′, B′ D) ... die Punkte O und (A B′, A′ B) gemein haben, so fallen sie zusammen. Dann ist A A′ B B′ ein vollständiges Viereck; dessen Diagonalpunkte sind O, S (Schnittpunkt von A A′ und B B′ ...) und M (Schnittpunkt von A B′ und A′ B); folglich sind (Nr. 50) die Geraden u und u' durch die Geraden u'' und O S harmonisch getrennt.

Sind die beiden Büschel U und U′ perspectivisch (Fig. 53), so fallen die Strahlen p und q' mit der Geraden U U′ zusammen; und da der Schnittpunkt der Strahlen $(a\,b', a'\,b)$, $(a\,c', a'\,c)$, $(a\,d', a'\,d) \ldots$ und der Schnittpunkt der Strahlen $(b\,a', b'\,a)$, $b\,c', b'\,c)$, $(b\,d', b'\,d) \ldots$ gleichzeitig in den Strahlen U U′ und $(a\,b', a'\,b)$ liegen, so fallen sie zusammen. Dann ist $a\,a'\,b\,b'$ ein vollständiges Vierseit; dessen Diagonalen sind U U′, s (der gemeinsame Schnitt der beiden Büschel) und m (die Verbindung der Punkte $a\,b'$, $a'\,b$); folglich sind (Nr. 49) die Punkte U und U′ durch den Punkt U″ und die Gerade s harmonisch getrennt.

Wenn also zwei Transversalen u und u' einen Strahlenbüschel a, b, $c \ldots$ in den Punkten (A, A′), (B, B′), (C, C′) ... schneiden, so liegen die Punkte, in denen sich die Linienpaare A B′ und A′ B, A C′ und A′ C, B C′ und B′ C schneiden, auf derselben Ge-

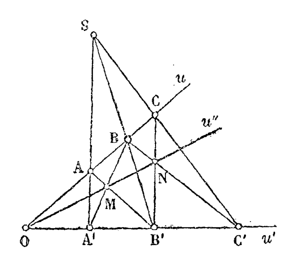
Wenn also eine Punktreihe aus zwei Punkten U und U′ durch die Strahlen (a, a') (b, b'), $(c, c') \ldots$ projicirt wird, so laufen die Geraden, welche die Punktenpaare $(a\,b', a'\,b)$, $(a\,c', a'\,c)$, $(b\,c', b'\,c) \ldots$ verbinden, in einem Punkte U″ zusammen,

raden u'', welche durch den Punkt $u\,u'$ geht; die Geraden u, u' sind durch die Gerade u'' und das Centrum des Büschels harmonisch getrennt.

Daraus folgt die Lösung der Aufgabe:

Die Gerade zu ziehen, welche einen gegebenen Punkt M mit

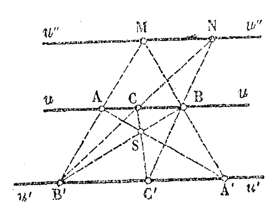
Fig. 51.



dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier gegebenen Geraden u und u' verbindet.

Wir ziehen durch M (Fig. 51 und 52) zwei Gerade, welche u in A und B, und u' in B' und A' schneiden, durch den Punkt S, in welchem sich A A' und B B'

Fig. 52.



schneiden, ziehen wir eine andere Gerade, welche u und u' in C und C' trifft. Der Schnitt-

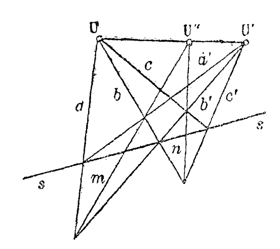
welcher mit der Geraden s die Strecke U U' harmonisch theilt.

Daraus folgt die Lösung der Aufgabe:

Den Schnittpunkt einer gezogenen Geraden m und einer Geraden (U, U') zu zeichnen, wenn letztere nicht gezogen, aber durch zwei gegebene Punkte U und U' bestimmt ist.

Auf m (Fig. 53) nehmen wir zwei Punkte, die mit U verbunden, die Geraden a und b, mit U' verbunden, die Geraden a' und b' geben; auf der Verbin-

Fig. 53.



dungslinie s der Punkte $a\,a'$ und $b\,b'$ nehmen wir einen dritten Punkt, der mit U und U' ver-

punkt N der beiden Geraden B C′ und B′ C ist ein zweiter Punkt der gesuchten Geraden u''.

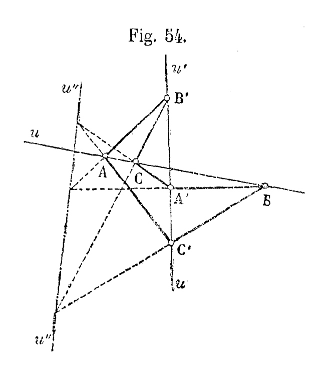
bunden die Geraden c und c' gibt. Die Verbindungslinie n der Punkte $b\,c'$ und $b'\,c$ schneidet m in dem gesuchten Punkte U″.

Sind die Geraden u und u' parallel (Fig. 52), so löst die vorhergehende Construction die Aufgabe: mit Hülfe des Lineals allein durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu legen, die zwei gegebenen Geraden parallel ist.

69. Wird dieser Satz auf drei Punktenpaare A A′, B B′, C C′ beschränkt, die im Uebrigen ganz beliebig sind, so kann er so ausgesprochen werden:

Hat ein Sechseck A B′ C A′ B C′ (Fig. 54) seine Eckpunkte ungeraden Ranges (1, 3, 5) auf einer Geraden u und seine Eckpunkte geraden Ranges (2, 4, 6) auf einer Geraden u', so schneiden sich die Paare der Gegenseiten (A B′ und A′ B), B′ C und B C′, C A′ und A C′) in drei Punkten einer Geraden u'' *).

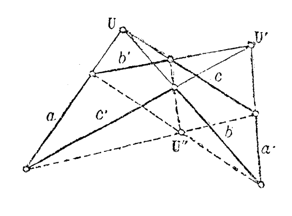
Fig. 54.



Wird dieser Satz auf drei Strahlenpaare $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$ beschränkt, die im Uebrigen ganz beliebig sind, so kann er so ausgesprochen werden:

Wenn in einem Sechsseit $a\,b'\,c\,a'\,b\,c'$ (Fig. 55) die Seiten ungeraden Ranges (1, 3, 5) in einem Punkte U, die Seiten geraden Ranges (2, 4, 6) in einem Punkte U′ zusammenlaufen, so schneiden sich die Geraden, welche die drei Paare der Gegenecken ($a\,b'$ und $a'\,b$, $b'\,c$ und $b\,c'$, $c\,a'$ und $a'\,c$) verbinden, in einem Punkte U″.

Fig. 55.



70. Kommen wir auf die Construction Nr. 66 (links) zurück

Kommen wir auf die Construction Nr. 66 (rechts) zurück

*) Pappus, loc. cit., Buch VII, S. 139.

und nehmen als Centrum S den Punkt, in welchem A A′ und B B′ sich schneiden, als Centrum S′ den Schnittpunkt von A A′ und C C′ (Fig. 56). Dann ist B′ C die Gerade u'', weil sich die Strahlen S B und S′ B′ in B′ und die Strahlen S C und S′ C′ in C schneiden. Folglich construirt man irgend ein anderes Paar entsprechender Punkte D und D′, indem man beachtet, dass die Geraden S D und S′ D′ sich auf B′ C schneiden.

und nehmen als Transversale s die Gerade, welche die Punkte $a\,a'$ und $c\,c'$ verbindet, als Transversale s' die Verbindungslinie der Punkte $a\,a'$ und $b\,b'$ (Fig. 57). Dann ist der Punkt U″ der Durchschnitt $b\,c'$, denn b verbindet die Punkte $s\,b$ und $s'\,b'$, und c' verbindet die Punkte $s\,c$ und $s'\,c'$. Man construirt also irgend ein anderes Paar entsprechender Strahlen d und d', indem man beachtet, dass die Punkte $s\,d$ und $s'\,d'$ mit $b\,c'$ auf derselben Geraden liegen müssen.

Fig. 56.

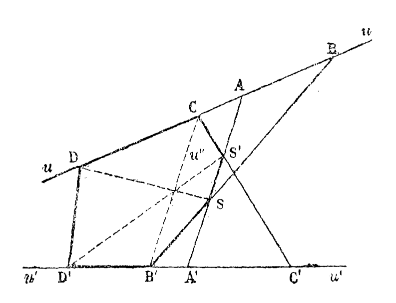
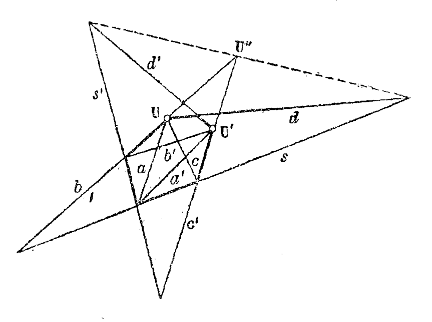


Fig. 57.



Aus der Betrachtung der Figur S S′ C D D′ B′, die ein Sechseck ist, ergibt sich der Satz:

In einem Sechseck, in welchem zwei Seiten Strecken zweier projectivischer Punktreihen, die vier andern Seiten die Verbindungen von vier Paaren entsprechender Punkte sind, schneiden sich die drei Geraden, welche die Gegenecken paarweise

Aus der Betrachtung der Figur $s\,s'\,b\,d\,d'\,c'$, die ein Sechsseit ist, ergibt sich der Satz:

In einem Sechsseit, in welchem zwei Eckpunkte Centren zweier projectivischer Strahlenbüschel, die vier andern Eckpunkte die Durchschnitte von vier Paaren entsprechender Strahlen sind, liegen die drei Punkte, in denen sich die Gegenseiten paarweise

verbinden, in demselben Punkte.

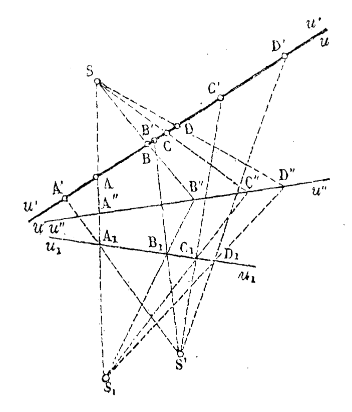
schneiden, in einer Geraden.

71. Würden sich bei der Lösung der Aufgabe Nr. 66 (links) die drei Geraden A A′, BB′, CC′ in demselben Punkte S schneiden (wenn z. B. A und A′ coincidiren), so wären die beiden Punktreihen perspectivisch; man hätte dann nur durch S Strahlen zu ziehen, um alle Paare entsprechender Punkte zu erhalten (Fig. 17).

Lägen die drei Punkte $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$ von Nr. 66 (rechts) auf derselben Geraden s (wenn z. B. a und a' coincidiren), so wären die beiden Büschel perspectivisch; man hätte dann nur die beiden Centren der Büschel mit jedem Punkte von s zu verbinden, um alle Paare entsprechender Strahlen zu erhalten (Fig. 18).

72. Sind die beiden Punktreihen u und u' (Nr. 66 links) übereinander liegend, d. h. liegen die sechs gegebenen Punkte A A′ B B′ C C′ auf derselben Geraden (Fig. 58), so projicirt man zuerst u' aus einem beliebigen Centrum S′ auf irgend eine Gerade u_1 und zeichnet dann an den Punktreihen $u \equiv$ (A B C ...)

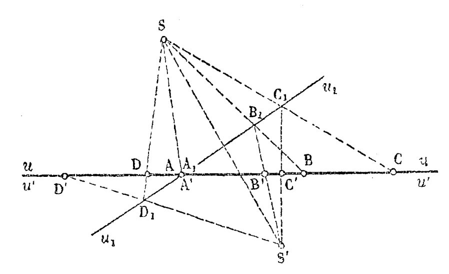
Fig. 58.



und $u_1 \equiv (A_1 B_1 C_1 \ldots)$, d. h. man verfährt mit den Punktenpaaren $(A\,A_1)$, $(B\,B_1)$, $(C\,C_1)$ in der Nr. 66 angegebenen Weise. Ist ein Paar entsprechender Punkte D und D_1 der Punktreihen u und u_1 gefunden, so bestimmt der Strahl $S'D_1$ auf u' den Punkt D′, welcher D entspricht.

Die Construction wird einfacher, wenn zwei entsprechende Punkte A und A′ coincidiren (Fig. 59); zieht man dann u_1 durch A, so ist die Punktreihe u_1 zu u perspectivisch; hat man folglich u' aus dem beliebigen Centrum S′ auf u_1 projicirt und schneiden sich BB_1 und CC_1 in S, so hat man nur noch u aus S auf u_1 und dann u_1 aus S′ auf u' zu projiciren.

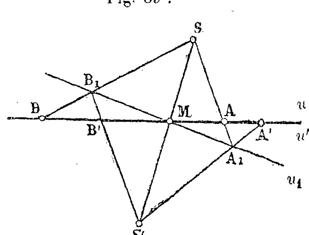
Fig. 59.



Die beiden übereinander liegenden Punktreihen u und u' haben einen zweiten entsprechend gemeinschaftlichen Punkt in dem Durchschnitt der gegebenen Geraden und des Strahles S S′; der erste ist A A′.

Geht also der Strahl S S′ durch den Punkt $u u_1$, so haben die beiden übereinander liegenden Punktreihen u und u' nur einen entsprechend gemeinschaftlichen Punkt. Wollte man auf einer gegebenen Geraden zwei übereinander liegende Punktreihen construiren, für welche A A′ ein Paar entsprechender Punkte und M der einzige entsprechend gemeinschaftliche Punkt ist (Fig. 59[1]), so müsste man, von einem beliebigen Punkte S′ aus, den Punkt

Fig. 59[1].



A′ auf eine durch M beliebig gezogene Gerade u_1 in A_1 projiciren und den Schnittpunkt S von AA_1 und S′M construiren; um dann auf u' den Punkt B′ zu finden, der einem Punkte B auf u entspricht, projicirt man B von S aus in B_1 und hierauf B_1 von S′ aus in B′.

Sind die beiden Büschel U und U′ (Nr. 66 rechts) concentrisch, d. h. gehen die sechs Strahlen $a\,a'\,b\,b'\,c\,c'$ durch denselben Punkt, so schneidet man zuerst $a'\,b'\,c'$ durch eine Transversale und projicirt die Schnittpunkte aus irgend einem Centrum U_1. Sind die projicirenden Strahlen $a_1\,b_1\,c_1$, so haben wir die beiden getrennten Büschel U und U_1 zu betrachten.

Wir können auch $a\,b\,c$ durch eine Transversale in A B C schneiden, ebenso $a'\,b'\,c'$ durch eine andere Transversale in A′ B′ C′, dann mit den beiden Punktreihen A B C ... und A′ B′ C′ ... in der oben erklärten Weise verfahren.

Wir geben die Figuren nicht, welche diesen Constructionen entsprechen, damit sie der Leser selbst herstelle. Man erhielte auch da eine merkliche Vereinfachung, wenn es unter den gegebenen Strahlen einen entsprechend gemeinschaftlichen gäbe, wenn z. B. a und a' in einen einzigen Strahl zusammenfielen etc.

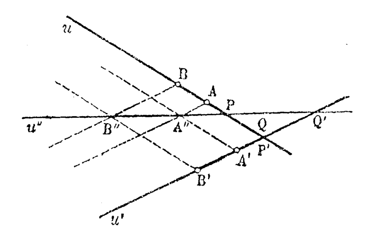
§ 11. Besondere Fälle und Uebungen.

73. Zwei Punktreihen sind ähnlich, wenn den Punkten A, B, C, D ... der einen Reihe die Punkte A′, B′, C′, D′ ... der anderen in der Weise entsprechen, dass das Verhältniss von zwei entsprechenden Strecken eine constante Zahl ist.

Ist diese Zahl die Einheit, so sind die Punktreihen gleich.

Zwei ähnliche Punktreihen sind projectivisch, weil jedes Doppelverhältniss, (ABCD) z. B. seinem entsprechenden (A′B′C′D′)

Fig. 60.



gleich ist. Denn setzen wir voraus, die beiden Geraden liegen in derselben Ebene (Fig. 60) und bezeichnen wir ihren Schnittpunkt als Punkt der Geraden u' mit P′ und als Punkt der Geraden u mit Q. Ein beliebiges Paar entsprechender Punkte sei A A′, P sei derjenige Punkt von u, welcher P′ entspricht,

Q' derjenige Punkt von u', welcher Q entspricht; ziehen wir AA'' parallel u' und $A'A''$ parallel u. In den Dreiecken PQQ' und PAA'' sind die Winkel Q und A gleich und von proportionalen Seiten eingeschlossen, denn nach Voraussetzung ist

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{PA}{P'A'} = \frac{PA}{AA''}$$

Daraus folgt, dass die Punkte P, Q', A'' in gerader Linie liegen; projicirt man also durch Parallele zu u' die Punktreihe $ABC\ldots$ auf PQ' in $A''B''C''\ldots$, hernach durch Parallele zu u die Punktreihe $A''B''C''\ldots$ auf u', so erhält man die Punktreihe $A'B'C'\ldots$

Ist $PQ = P'Q'$, d. h. bildet die Gerade PQ' mit den beiden gegebenen Geraden gleiche Winkel, so sind die beiden Punktreihen gleich.

Dem unendlich fernen Punkte von u entspricht der unendlich ferne Punkt von u'.

74. Umgekehrt, wenn sich die unendlich fernen Punkte I und I' zweier projectivischer Punktreihen u und u' entsprechen, so sind die Punktreihen ähnlich. Denn projicirt man (Fig. 60) u aus I' und u' aus I (wie in Nr. 67, links), so erhält man zwei Büschel paralleler Strahlen, von denen die entsprechenden sich auf einer festen Geraden u'' schneiden. Die Strecken $A''B''$ von u'' sind dann den Strecken AB von u und den Strecken $A'B'$ von u' proportional; folglich sind die Strecken AB von u den Strecken $A'B'$ von u' proportional.

Oder auch: sind AA', BB', CC' drei Paare entsprechender Punkte und I, I' die unendlich fernen Punkte, so haben wir die Gleichheit der Doppelverhältnisse (Nr. 58)

$$(ABCI) = (A'B'C'I'), \text{ oder}$$

da I und I' unendlich ferne sind (Nr. 54)

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

eine Gleichung, welche genau die Proportionalität der entsprechenden Segmente ausdrückt.

Beispiele. Schneidet man einen Strahlenbüschel (dessen Centrum in endlicher Ferne liegt) durch zwei parallele Geraden, so erhält man zwei ähnliche Punktreihen.

Zwei beliebige Schnitte eines Büschels paralleler Strahlen sind ähnliche Punktreihen.

In diesen beiden Beispielen sind die Punktreihen auch perspectivisch; im ersten Falle ist der entsprechend gemeinschaftliche Punkt im Unendlichen; im zweiten Falle ist er (im Allgemeinen) in endlicher Entfernung.

75. Zwei Strahlenbüschel, deren Centren unendlich ferne liegen, sind projectivisch und heissen **ähnlich**, wenn ein Schnitt des einen Büschels einem Schnitte des andern ähnlich ist. Dann sind irgend zwei andere Schnitte der beiden Büschel ebenfalls ähnlich.

76. Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse schliesst man, dass zwei gleiche Punktreihen projectivisch sind (Nr .61) und dass umgekehrt zwei projectivische Punktreihen gleich sind (Nr. 54), wenn die entsprechenden Segmente, die zwischen den Punkten zweier entsprechenden Ternen $A B C$ und $A' B' C'$ liegen, gleich sind, d. h. wenn $A' B' = A B$, $A' C' = A C$ (folglich $B' C' = B C$).

Beispiele. Schneidet man einen Büschel paralleler Strahlen durch zwei zu diesen Strahlen gleichgeneigte Transversalen, so erhält man zwei gleiche Punktreihen.

Schneidet man einen Büschel nicht paralleler Strahlen durch zwei parallele Transversalen in gleichen Entfernungen von dem Centrum des Büschels, so erhält man zwei gleiche Punktreihen.

77. Zwei ähnliche, übereinander liegende Punktreihen, die schon einen entsprechend gemeinschaftlichen Punkt N in unendlicher Ferne haben, besitzen noch einen anderen M, der gewöhnlich in endlicher Distanz ist. Sind $A A'$, $B B'$ zwei Paare entsprechender Punkte, so hat man

$$M A : M A' = A B : A' B' = \text{const.}$$

Es wird also genügen, das Segment $A A'$ in zwei Theile $M A$ und $M A'$ zu theilen, die ein gegebenes Verhältniss haben. Der Quotient $M A : M A'$ ist (Nr. 54) das Doppelverhältniss $(A A' M N)$.



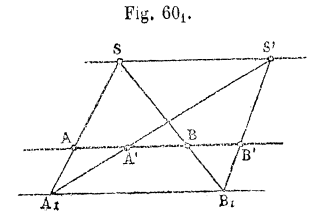
Ist sein Werth gleich — 1, so ist die Gruppe A A′ M N harmonisch (Nr. 55), d. h. M ist der Mittelpunkt von A A′, ebenso derjenige von jedem anderen entsprechenden Segment B B′...; mit andern Worten, die beiden Punktreihen sind aus Paaren von Punkten zusammengesetzt, die gleich weit von einem festen Punkte M entfernt sind.

Ist aber das constante Verhältniss gleich + 1, d. h. sind M A und M A′ in Grösse und Vorzeichen gleich, so ist der Punkt M im Unendlichen. Denn, da (A A′ M N) = 1, so hat man (N M A′ A) = 1 (Nr. 38); folglich (Nr. 57) fallen die Punkte M und N zusammen.

Es folgt auch aus der Construction von Nr. 72 (Fig. 59_1), dass zwei übereinander liegende Punktreihen, die nur einen entsprechend gemeinschaftlichen Punkt in unendlicher Ferne haben, gleich sind.

Rückt der Punkt M ins Unendliche, so werden die Geraden S S′ und $A_1 B_1$ der gegebenen Geraden u oder u' (Fig. 60_1) parallel und da die Dreiecke $S A_1 B_1$ und $S' A_1 B_1$ eine gemeinsame

Fig. 60_1.



Basis haben, die der Verbindungslinie der Spitzen parallel ist, so sind die Segmente, welche sie auf einer beliebigen Parallelen zur Basis abschneiden, gleich; also A B = A′ B′, oder zwei entsprechende Segmente sind gleich; folglich ist A A′ = B B′, d. h. das zwischen zwei entsprechenden Punkten liegende Segment ist constant. Man kann also voraussetzen, dass die beiden Punktreihen durch ein in Grösse und Sinn bestimmtes Segment erzeugt werden, welches sich auf einer gegebenen Geraden fortbewegt; das eine Ende A des Segmentes beschreibt die eine Punktreihe, das andere Ende A′ beschreibt die andere Reihe.

Umgekehrt ist klar: wenn ein in Grösse und Sinn gegebenes Segment auf einer gegebenen Geraden fortgleitet, so beschreiben seine Endpunkte A und A′ zwei gleiche und folglich

projectivische Punktreihen, die in unendlicher Ferne einen einzigen entsprechend gemeinschaftlichen Punkt haben.

78. Zwei Strahlenbüschel werden gleich genannt, wenn den Elementen des einen die Elemente des andern in der Weise entsprechen, dass der von zwei beliebigen Elementen des ersten Gebildes eingeschlossene Winkel der Grösse und dem Sinne nach demjenigen Winkel gleich ist, der von den entsprechenden Elementen des andern Gebildes eingeschlossen wird.

Es ist klar, dass man zwei gleiche Büschel immer durch zwei Transversalen so schneiden kann, dass die sich ergebenden Punktreihen gleich sind; zwei gleiche Punktreihen sind aber auch immer projectivisch, also sind auch zwei gleiche Büschel immer projectivisch.

Umgekehrt sind zwei projectivische Strahlenbüschel $abcd\ldots$ und $a'b'c'd'\ldots$ gleich, wenn drei Strahlen a, b, c des einen und die drei entsprechenden Strahlen a', b', c' des andern zwei gleiche Figuren bilden. Der Satz kann bewiesen werden, indem man die beiden Büschel durch zwei Transversalen in der Weise schneidet, dass die Schnitte ABC und $A'B'C'$ der Gruppen abc und $a'b'c'$ gleich sind. Die projectivischen Punktreihen, die sich daraus ergeben, sind gleich (Nr. 76), folglich sind auch die andern entsprechenden Winkel ad und $a'd'\ldots$ der gegebenen Büschel einander gleich.

79. Da zwei gleiche Gebilde (Punktreihen oder Büschel) immer projectivisch sind, so können wir daraus schliessen: wenn man eine Punktreihe oder einen Büschel an eine andere Stelle im Raume bringt, ohne die gegenseitige Lage ihrer Elemente zu verändern, so ist dieses Gebilde in seiner neuen Lage zu demselben Gebilde in seiner ursprünglichen Lage projectivisch.

80. Man denke sich zwei gleiche Strahlenbüschel $abcd\ldots$ und $a'b'c'd'$ in derselben Ebene oder in zwei parallelen Ebenen; ein Strahl des einen Büschels drehe sich um sein Centrum und beschreibe den Büschel selbst, dann beschreibt der

entsprechende Strahl den andern Büschel, indem er sich entweder in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne um sein Centrum bewegt. Im ersten Falle nennt man die beiden Büschel einstimmig gleich, im zweiten Falle sind sie entgegengesetzt gleich.

Im ersten Falle sind offenbar die Winkel $a a'$, $b b'$, $c c' \ldots$ alle gleich (der Grösse und dem Sinne nach); folglich sind zwei entsprechende Strahlen entweder immer parallel oder nie parallel.

Im zweiten Falle sind zwei entsprechende Winkel gleich gross, aber im Sinne entgegengesetzt. Verschiebt man folglich einen der Büschel parallel zu sich selbst, bis sein Centrum mit demjenigen des zweiten Büschels zusammenfällt, so sind offenbar die Winkelhalbirenden zweier entsprechender Strahlen a und a' die entsprechend gemeinschaftlichen Strahlen der beiden übereinander liegenden Büschel, die immer noch projectivisch sind (Nr. 79); daraus folgt, dass diese Strahlen auch die Winkelhalbirenden irgend eines andern Paares entsprechender Strahlen sind. Nimmt man also wieder an, dass die beiden Büschel nicht concentrisch sind, so haben sie zwei parallele Paare entsprechender Strahlen; in jedem Büschel sind diese beiden Strahlen senkrecht aufeinander, denn sie haben die Richtungen der Winkelhalbirenden von einem beliebigen Paar entsprechender Strahlen.

81. Sind zwei Strahlenbüschel $a\,b\,c\,d \ldots$ und $a'\,b'\,c'\,d' \ldots$ projectivisch und sind die Winkel $a a'$, $b b'$, $c c'$ von drei Paaren entsprechender Strahlen gleich gross und von gleichem Sinne, so hat der Winkel $d d'$ von irgend einem andern entsprechenden Strahlenpaar dieselbe Grösse und denselben Sinn. Denn verschieben wir den ersten Büschel, parallel zu sich selbst, bis er mit dem zweiten concentrisch ist und drehen ihn um das gemeinsame Centrum um den Winkel $a a'$, so werden die Strahlen a, b, c bezüglich mit den Strahlen a', b', c' zusammenfallen; die beiden Büschel, die nicht aufgehört haben, projectivisch zu sein (Nr. 79), haben dann drei entsprechend gemeinschaftliche Strahlen, folglich (Nr. 64) wird

auch jeder andere Strahl mit seinem entsprechenden zusammenfallen. Bringt man jetzt den ersten Büschel in seine ursprüngliche Lage zurück, so wird der Winkel dd' gleich aa' sein.

82. Da die Winkel aa', bb', cc'... von zwei einstimmig gleichen Strahlenbüscheln gleich sind, so können solche Büschel, wenn sie concentrisch sind und in einerlei Ebene liegen, durch die Rotation eines unveränderlichen Winkels aa um seinen festen Scheitel O erzeugt werden; der eine Schenkel a erzeugt den einen Büschel, der andere Schenkel a' erzeugt den andern Büschel.

Umgekehrt, dreht sich ein Winkel von unveränderlicher Grösse um seinen Scheitel, so erzeugen seine Schenkel (einstimmig) gleiche und folglich projectivische Strahlenbüschel. Offenbar haben diese projectivischen Strahlenbüschel keinen entsprechend gemeinschaftlichen Strahl.

Eine Transversale, welche diese beiden Büschel schneidet, bestimmt übereinander liegende Punktreihen ohne entsprechend gemeinschaftliche Punkte.

Ohne irgend welche Veränderung könnte über zwei Ebenenbüschel im Raume dasselbe gesagt werden, was in den Nr. 78—82 von zwei Strahlenbüscheln derselben Ebene gesagt wurde.

83. Projiciren wir die übereinander liegenden Punktreihen A B C..., A′B′C′ auf derselben Geraden mit Hülfe der Büschel $abc...$, $a'b'c'...$ aus zwei verschiedenen Punkten U und U′. Die durch U und U′ gehenden Strahlen i, j' seien der gegebenen Geraden parallel, i' und j ihre entsprechenden Strahlen. Die Punkte I′, J, in welchen diese letzteren Strahlen die gegebene Gerade schneiden, werden dann diejenigen Punkte sein, welche dem unendlich fernen Punkte (I oder J′) der gegebenen Geraden entsprechen, je nachdem man diesen letzteren als Punkt der Reihe A B C... oder als Punkt der Reihe A′B′C′... ansieht.

Die Projectivität der beiden entsprechenden Gruppen gibt uns (Nr. 59) eine Gleichheit der Doppelverhältnisse, aus welcher man zieht

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{JA} \,.\, \mathrm{I'A'} = \mathrm{JB} \,.\, \mathrm{I'B'} = \text{const.},$$

d. h. das Product J A . I′A′ ist eine für jedes Paar A A′ constante



Grösse. O sei die Mitte des Segmentes $J I'$, O' der O entsprechende Punkt (O als Punkt der ersten Reihe angesehen).

Da die Gleichung (1) für jedes Paar entsprechender Punkte, also auch für $O O'$, besteht, so haben wir

$$(2) \qquad J A \,.\, I' A' = J O \,.\, I' O',$$

oder auch

$$(O A - O J) \,.\, (O A' - O I') + O J \,.\, (O O' - O I') = 0,$$

und da

$$O I' = - O J,$$

haben wir auch

$$(3) \qquad O A \,.\, O A' - O I' (O A - O A' + O O') = 0.$$

Fragen wir jetzt, ob entsprechend gemeinschaftliche Punkte vorhanden sind und nennen wir einen solchen E, so geht die letzte Gleichung, in welcher E an der Stelle von A und A' gesetzt wird, in die folgende über

$$(4) \qquad \overline{O E}^2 = O I' \,.\, O O'.$$

Daraus folgt: wenn $O I' \,.\, O O'$ positiv ist, d. h. wenn O nicht zwischen I' und O' liegt, so gibt es zwei vereinigte Punkte, E und F, in deren Mitte O liegt und welche die Punkte I' und O' harmonisch trennen (Nr. 56).

Liegt O zwischen I' und O', so hat es keine entsprechend gemeinschaftlichen Punkte.

Fällt O' mit O zusammen, so hat es nur einen entsprechend gemeinschaftlichen Punkt und zwar ist es der Punkt O selbst.

Stellen wir uns vor, es werde jede der beiden Punktreihen durch einen Punkt erzeugt, der sich immer in demselben Sinne fortbewegt*). Wird die eine Reihe in dem Sinne A B C durchlaufen, so wird die andere Reihe in dem Sinne $A' B' C'$ durchlaufen, welcher dem ersten entweder gleich oder entgegengesetzt ist.

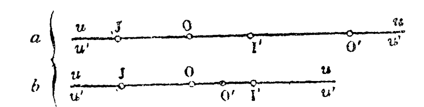
Sind die beiden Sinne A B C, $A' B' C'$ entgegengesetzt, so sind es auch die beiden Sinne I J A und $I' J' A'$; dasselbe ist mit dem endlichen Segment J A und dem unendlichen Segment $J' A'$ der Fall, d. h. die endlichen Segmente J A und $I' A'$ haben denselben Sinn. In Folge der Gleichung (2) haben auch J O und $I' O'$ denselben Sinn, also fällt O nicht zwischen I' und O' (Fig. 61, a); es hat folglich zwei entsprechend gemeinschaftliche Punkte. Da O E die mittlere Proportionale zwischen $O I'$

*) Siehe Steiner, loc. cit., S. 61, § 16, II.

und O O′ ist, so fallen die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte über das endliche Segment J I′ hinaus.

Sind die Sinne A B C und A′B′C′ gleich, so gelangt man auf dieselbe Weise zu dem Schlusse, dass J A und I′A′, ebenso

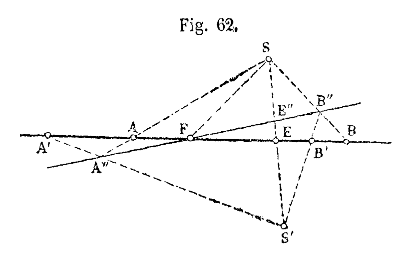
Fig. 61.



J O und I′O′ entgegengesetzte Sinne haben. Es hat dann entsprechend gemeinschaftliche Punkte, wenn O nicht zwischen I′ und O′, d. h. wenn O′ zwischen O und I′ liegt (Fig. 61, b). Da O E die mittlere Proportionale zwischen O I′ und O O′ ist, so fallen die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte innerhalb des Segmentes J I′.

Nehmen wir an, es gebe zwei entsprechend gemeinschaftliche Punkte E und F (Fig. 62); wir ziehen durch E irgend eine Gerade und projiciren aus zwei Punkten S und S′ dieser Geraden

Fig. 62.



beziehungsweise die beiden Punktreihen. Die beiden Büschel sind wegen dem vereinigten Strahle S E S′ perspectivisch, folglich schneiden sich die entsprechenden Strahlen S A und S′A′, S B und S′B′, . . . S F und S′F′ in Punkten, die auf einer durch F gehenden Geraden u'' liegen.

Der Schnittpunkt dieser Geraden u'' und S S′ sei E″; dann sind E F A A′ und E F B B′ die Projectionen von E E″S S′ aus den Centren A″ und B″, also sind die Gruppen E F A A′ und E F B B′ projectivisch oder es ist das Doppelverhältniss der aus den beiden entsprechend gemeinschaftlichen Punkten und zwei beliebigen entsprechenden Punkten gebildeten Gruppe constant.

Oder: Zwei übereinanderliegende Gebilde mit zwei entsprechend gemeinschaftlichen Elementen sind aus

Elementenpaaren zusammengesetzt, die mit zwei fixen Elementen ein constantes Doppelverhältniss geben*).

Gibt es keine vereinigte Punkte, liegt also O zwischen O′ und I′ (Fig. 63), so errichten wir in O ein Loth O U auf die gegebene Gerade und machen es gleich dem geometrischen Mittel zwischen I′O und O O′, der Winkel I′U O′ sei also ein rechter. Wir ziehen überdies durch U die Gerade I U J′ parallel der gege-

Fig. 63.

benen Geraden, dann ist Winkel I U I′ gleich Winkel J U J′, Winkel O U O′ gleich Winkel O I′U und folglich gleich I U I′. In den beiden projectivischen Büscheln, welche die beiden gegebenen Punktreihen aus U projiciren, sind also die Winkel I U I′, J U J′ und O U O′ von drei Paaren entsprechender Strahlen gleich, folglich (Nr. 81) sind auch die Winkel A U A′, B U B′ . . . gleich und von gleichem Sinne*[1]).

Oder: Zwei übereinanderliegende Punktreihen ohne entsprechend gemeinschaftliche Punkte können immer mit dem Durchschnitt der gegebenen Geraden durch die Schenkel eines constanten Winkels hervorgebracht werden, der sich um seinen Scheitel in festem Sinne dreht.

84. Wir haben (Nr. 66) gesehen, wie man im Allgemeinen die Aufgabe löst: aus drei Paaren entsprechender Elemente von zwei projectivischen Gebilden (der ersten Stufe) eine beliebige Anzahl von Paaren zu construiren oder dasjenige Element eines Gebildes zu construiren, das einem gegebenen Elemente des anderen Gebildes entspricht. Der Studierende wird übungsweise folgende besondere Fälle lösen:

---

*) Vorstehende Construction ist die Auflösung der Aufgabe: Aus zwei gegebenen Paaren entsprechender Punkte A A′ und B B′ und einem entsprechend gemeinschaftlichen Punkte E den anderen entsprechend gemeinschaftlichen Punkt zu finden.

*[1]) Chasles, loc. cit., S. 119.

1. Man setze voraus, dass die beiden Punktreihen u und u' nicht auf derselben Geraden liegen und dass die gegebenen Elementenpaare die folgenden sind:

(*a*)	P und P′,	Q und Q′ *),	A und A′;
(*b*)	P und P′,	A und A′,	B und B′;
(*c*)	I und I′,	J und J′,	P und P′;
(*d*)	I und I′,	J und J′,	A und A′;
(*e*)	I und I′,	P und P′,	Q und Q′;
(*f*)	I und I′,	P und P′,	A und A′;
(*g*)	I und I′,	A und A′,	B und B′;

2. Wenn die Punktreihen auf derselben Geraden liegen, die Aufgaben (*d*) und (*g*) zu lösen.

3. Wenn die Gebilde zwei nicht concentrische Strahlenbüschel sind, die Aufgaben zu lösen, welche zu den Aufgaben (*a*) und (*b*) correlativ sind.

4. Man setze voraus, der eine Strahlenbüschel habe sein Centrum in unendlicher Ferne.

5. Man setze voraus, beide Büschel haben ihre Centren in unendlicher Ferne.

85. Auch der folgende Satz kann bewiesen werden: Gleiten die drei Eckpunkte A A′ A″ eines veränderlichen Dreiecks auf drei festen Geraden u, u', u'', die in einem Punkte zusammenlaufen und drehen sich zwei seiner Seiten A′ A″, A″ A beziehungsweise um zwei feste Punkte O und O′, so geht auch die dritte Seite A A′ durch einen festen Punkt O″, der auf der Geraden O O′ liegt.

Man hat nur zu beweisen, dass die Punkte A, A′, A″ bei ihrer Bewegung drei Punktreihen beschreiben, die paarweise perspectivisch sind; man kann auch den Satz von Nr. 13 auf zwei Lagen des veränderlichen Dreiecks anwenden.

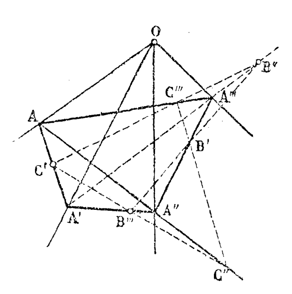
Ist dieser Satz festgestellt, so leitet man davon unmittelbar folgenden Zusatz ab: Gleiten die Eckpunkte eines veränderlichen Vierecks A A′ A″ A‴ auf vier festen Geraden, die durch denselben Punkt O gehen, während sich drei Seiten A A′, A′ A″, A″ A‴ um drei feste Punkte C′, B‴, B′ drehen, so gehen die vierte Seite A‴ A und die Diagonalen A A″, A′ A‴ durch drei andere feste Punkte C‴, C″, B″, welche durch die drei ersten

*) P, P′, Q, Q′, I, I′, J, J′ haben die in Nr. 66 gegebene Bedeutung. A, B, . . . sind beliebig gegebene Punkte.

bestimmt sind. Die sechs festen Punkte sind die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits, d. h. sie liegen in Gruppen von je drei auf vier Geraden (Fig. 64).

Auf dieselbe Art schliesst man auf den entsprechenden Zusatz in Bezug auf ein Polygon von n Ecken.

Fig. 64.



86. **Lehrsatz.** Ist ein Dreieck $O_1 O_2 O_3$ einem andern Dreieck $U_1 U_2 U_3$ umschrieben, so gibt es eine unendliche Anzahl von Dreiecken, die dem ersten umschrieben, dem zweiten eingeschrieben sind (Fig. 65).

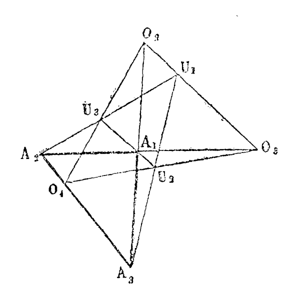
Denn projiciren wir die Punktreihe $U_2 U_3 \ldots$ aus O_2 und aus O_3, so erhalten wir die zwei perspectivischen Büschel

$$O_2\ (U_1,\ U_2,\ U_3, \ldots) \text{ und } O_3\ (U_1,\ U_2,\ U_3 \ldots);$$

ebenso, wenn wir die Punktreihe $U_1 U_3$ aus O_1 und aus O_3 projiciren, bekommen wir die perspectivischen Büschel

$$O_1\ (U_1,\ U_2,\ U_3 \ldots) \text{ und } O_3\ (U_1,\ U_2,\ U_3 \ldots).$$

Fig. 65.



Also sind die Büschel

$$O_1\ (U_1,\ U_2,\ U_3 \ldots) \text{ und } O_2\ (U_1,\ U_2,\ U_3 \ldots)$$



projectivisch (Nr. 35); aber die Strahlen $O_1 U_3$, $O_2 U_3$ fallen zusammen, folglich (Nr. 62) sind diese beiden Büschel perspectivisch und ihr gemeinsamer Schnitt ist $U_1 U_2$. So bekommen wir drei Büschel O_1, O_2, O_3, die paarweise perspectivisch sind; sie haben als gemeinsame Schnitte

der erste und zweite die Gerade $U_1 U_2$,
der zweite und dritte die Gerade $U_2 U_3$,
der dritte und erste die Gerade $U_3 U_1$.

Damit ist gezeigt, dass jede Terne entsprechender Strahlen ein Dreieck bilden wird, das dem Dreieck $O_1 O_2 O_3$ umschrieben, dem Dreieck $U_1 U_2 U_3$ einbeschrieben ist*).

87. **Lehrsatz.** Eine um einen festen Punkt U bewegliche Gerade schneidet zwei Geraden u und u' in den Punkten A und A'; zwei Punkte S und S' liegen mit uu' in derselben Geraden; dann beschreibt der Durchschnittspunkt M der Geraden SA und S'A' eine Gerade*1).

Der Satz wird bewiesen, indem man beachtet, dass die Punkte A und A' zwei perspectivische Punktreihen beschreiben und dass folglich die durch die beweglichen Strahlen SA und S'A' erzeugten Büschel perspectivisch sind (Nr. 35 und 62). Wir schlagen vor, auch den correlativen Lehrsatz zu beweisen.

88. **Lehrsatz.** U, S und S' sind drei gegebene Punkte einer Geraden; eine Transversale, welche zwei feste Geraden u und u' in zwei Punkten A und A' schneidet, dreht sich um den Punkt U; der Durchschnittspunkt M der Geraden SA und S'A' beschreibt eine Gerade, welche durch den Punkt uu' geht*2).

Der Beweis ist demjenigen des vorhergehenden Lehrsatzes analog.

Dieser Satz kann auch so ausgesprochen werden:

Wenn sich die Seiten eines veränderlichen Dreiecks AA'M um drei feste Punkte U, S, S' einer Geraden

---

*) Steiner, loc. cit., S. 85, §23, II.

*1) Pappus, loc. cit., Buch VII, S. 123, 139; 141, 143. — Chasles, loc. cit., S. 242.

*2) Chasles, loc. cit., Nr. 334.

drehen, während zwei seiner Eckpunkte auf zwei festen Geraden u und u' fortgleiten, so beschreibt der dritte Eckpunkt M auch eine Gerade *).

Ebenso kann man den allgemeineren Satz beweisen:

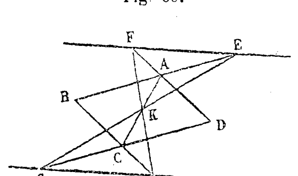
Verändert sich ein Polygon von n Seiten so, dass alle seine Seiten durch ebenso viele feste Punkte einer Geraden gehen, während $n-1$ Eckpunkte feste gerade Linien durchlaufen, so beschreiben auch der letzte Eckpunkt und der Durchschnittspunkt von zwei beliebigen nicht aufeinanderfolgenden Seiten gerade Linien *1).

Der correlative Satz ist in Nr. 85 angedeutet.

89. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt P in der Ebene eines Parallelogramms ABCD, nur mit Hülfe des Lineals eine Parallele zu einer Geraden EF zu ziehen, die in derselben Ebene liegt.

In Fig. 66 sind E und F die Durchschnittspunkte der gegebenen Geraden und der Seiten AB und AD; wir nehmen

Fig. 66.



einen beliebigen Punkt K auf AC, ziehen EK und FK, welche CD und BC beziehungsweise in G und H schneiden. Die Dreiecke AEF und CGH sind collinear (Nr. 15), weil die Geraden AC, EG und FH durch denselben Punkt K gehen; die Collineationsaxe ist die unendlich ferne Gerade, weil die Seiten AE und AF des ersten Dreiecks beziehungsweise den entsprechenden Seiten des zweiten Dreiecks parallel sind. Also sind auch die andern Seiten EF und GH parallel *2).

Die Aufgabe ist so auf ein anderes schon gelöstes (Nr. 69) Problem zurückgeführt: Durch einen Punkt P eine Parallele zu

*) Euclid's Porisma. — Pappus, loc. cit., Vorwort des Buches VII.

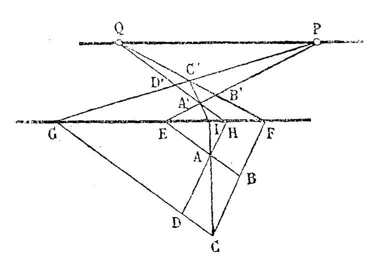
*1) Porisma von Pappus, loc. cit., Vorwort des Buches VII.

*2) Poncelet, Propriétés projectives, Nr. 198 (Paris, 1822).

zwei gegebenen parallelen Geraden E F und G H zu ziehen. Die folgende Auflösung rührt von Lambert her *).

Wir verlängern (Fig. 67) die Seiten A B, B C, C D, D A und eine Diagonale A C des gegebenen Parallelogramms bis zu den Schnitt-

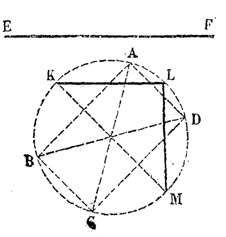
Fig. 67.



punkten E, F, G, H, I mit der gegebenen Geraden E F, ziehen eine beliebige Gerade durch I, welche die Geraden E P und G P in A′ und C′ trifft; schneiden sich die Geraden H A′ und F C′ in Q, so ist *P* Q die verlangte Gerade. Denn bezeichnen wir mit B′ und D′ die Punkte, in welchen E P und G P beziehungsweise von F Q und H Q geschnitten werden, so sind die Vierecke A B C D und A′B′C′D′ collinear, E F ist die Collineationsaxe. Der Punkt P entspricht dem Schnittpunkt von A B und C D und Q dem Schnittpunkt von B C und A D; folglich ist P Q die Fluchtlinie der zweiten Figur und darum P Q parallel E F (Nr. 15).

Aufgabe. — Man gibt einen Kreis und seinen Mittelpunkt;

Fig. 68.



nur mit Hülfe des Lineals eine Senkrechte auf eine gegebene Gerade zu ziehen.

Wir ziehen im Kreise (Fig. 68) zwei Durchmesser A C und B D. Die Figur A B C D wird ein Rechteck sein. Nimmt man hierauf

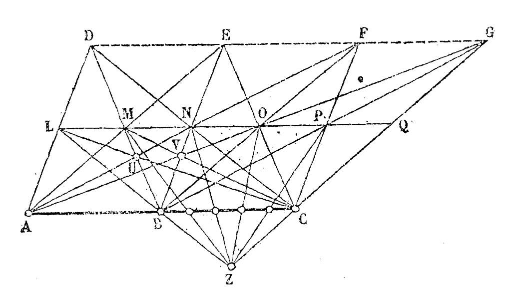
*) Freie Perspective, Bd. II, S. 169 (Zürich, 1774).

einen beliebigen Punkt K der Peripherie, so kann man mit Hülfe der vorigen Aufgabe die Gerade K L parallel der gegebenen Geraden E F ziehen. Verbindet man dann den zweiten Schnittpunkt L der Peripherie und der Geraden K L mit dem zweiten Endpunkt M des Durchmessers, der durch K geht, so ist offenbar L M senkrecht zu K L und folglich auch zu der gegebenen Geraden.

Aufgabe. B ist der Mittelpunkt der Geraden A C; man will B C in n gleiche Theile theilen, indem man sich nur des Lineals bedient.

Zeichnen wir ein Viereck U L D N, von welchem zwei Gegenseiten D L und N U in A, die andern Gegenseiten L U und D N

Fig. 69.



in C zusammenlaufen und dessen eine Diagonale D U durch B geht; die andere Diagonale L N wird parallel A C (Nr. 52) und in M durch D U (Nr. 49) halbirt sein. Zeichnen wir jetzt ein zweites Viereck V M E O unter denselben Bedingungen wie das erste und so, dass M das Ende und N die Mitte der Diagonale sei, die A C parallel ist; mit andern Worten, ziehen wir die Geraden A M und B N, die sich in E schneiden, die Gerade C E, welche in O die Verlängerung von L N so schneidet, dass N O = M N = L M wird. Zeichnen wir ein drittes, den beiden ersten analoges Viereck so, dass N das eine Ende und O die Mitte der Diagonale sei, die parallel A C geht. Ist P das andere Ende dieser Diagonale, so haben wir O P = N O = M N = L M. Fahren wir in derselben Weise fort, bis die Zahl der gleichen Segmente L M, M N, N O, O P... gleich n ist; ist dann P Q das zuletzt erhaltene Segment, so ziehen wir die Gerade L B, welche Q C in Z schneidet; die Geraden, welche Z mit den Punkten

M, N, O, P... verbinden, theilen BC in n gleiche Theile. Damit ist die Aufgabe gelöst *).

Der Studirende löse auch, nur mittelst des Lineals, folgende Aufgaben:

Gegeben sind zwei parallele Geraden AB und u; AB in zwei gleiche Theile zu theilen (Nr. 52).

Eine Strecke AB und ihre Mitte C sind gegeben; durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu AB zu ziehen (Nr. 52).

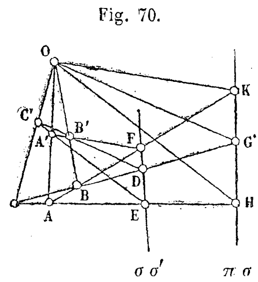
Ein Kreis und sein Centrum sind gegeben; einen gegebenen Winkel zu halbiren (Nr. 53).

Zwei gleiche, anstossende Winkel AOC und COB sind gegeben; durch O eine Senkrechte auf OC zu errichten (Nr. 53).

90. **Lehrsatz.** Sind zwei Dreiecke ABC, A'B'C', die in verschiedenen Ebenen σ und σ' liegen, perspectivisch und dreht man die Ebene des einen um $\sigma\sigma'$, so verändert der Punkt O, in welchem sich die Strahlen AA', BB' und CC' schneiden, seine Lage und beschreibt einen Kreis, dessen Ebene auf der Geraden $\sigma\sigma'$ senkrecht steht *1).

In Fig. 70 sind D, E und F die Punkte der Geraden $\sigma\sigma'$, in welchen sich die entsprechenden Seiten BC und B'C', CA und C'A', AB und A'B' schneiden (Nr. 15). Durch das Projectionscentrum O der beiden Dreiecke ABC und A'B'C', die

Fig. 70.



wir uns in bestimmten Stellungen ihrer Ebenen denken, ziehen wir die Geraden OG, OH und OK beziehungsweise parallel zu den Seiten des Dreiecks A'B'C'; da diese Geraden in

*) Diese und andere nur mit Hülfe des Lineals zu lösenden Aufgaben finden sich in dem oben angeführten Werke von Lambert.

*1) Chasles, loc. cit., Nr. 368, 369.

derselben Ebene π (parallel σ') liegen, so treffen sie die Ebene σ in drei Punkten G, H und K der Geraden $\pi\,\sigma$.

Stellen wir uns jetzt vor, es drehe sich die Ebene σ' mit dem Dreieck A′B′C′ um die Gerade $\sigma\,\sigma'$. Die Gruppe der vier Punkte B C D G ist perspectivisch zu der Gruppe B′ C′ D G′, in welcher G′ der unendlich ferne Punkt von B′ C′ ist; folglich ist das Doppelverhältniss (B C D G) gleich dem Doppelverhältniss (B′ C′ D G′) oder auch (Nr. 54) gleich B′D : C′D, d. h. gleich einer constanten Grösse. Da aber B, C und D drei feste Punkte sind, so wird auch G ein fester und unveränderlicher Punkt sein (Nr. 54). Die ähnlichen Dreiecke O B G und B′B D geben

$$OG : B'D = BG : BD,$$

daraus

$$OG = \frac{B'D \,.\, BG}{BD},$$

d. h. O G ist eine constante Grösse. Der Punkt O bewegt sich also auf einer Kugel, deren Centrum in G und deren Radius obige unveränderliche Grösse ist.

Man zeigt ebenso, dass sich der Punkt O auf zwei anderen Kugeln bewegt, deren Centren die Punkte H und K sind.

Der Punkt (O) beschreibt also, weil er gleichzeitig auf mehreren Kugeln liegen muss, eine Kreislinie, deren Ebene senkrecht auf der Geraden steht, in welcher die Kugelmittelpunkte liegen und deren Mittelpunkt auf derselben Geraden ist *).

Diese Gerade G H K ist die Durchschnittslinie der Ebenen π und σ, folglich parallel $\sigma\,\sigma'$ (da die Ebenen π und σ' parallel sind); sie ist die Fluchtlinie oder Grenzlinie der Figur σ, welche man als perspectivisches Bild der Figur σ' ansieht (Nr. 10).

91. **Lehrsatz.** Haben zwei projectivische Büschel, die in derselben Ebene liegen und keine entsprechend gemeinschaftlichen Strahlen besitzen, denselben Mittelpunkt O, so können sie als das perspectivische Bild zweier einstimmig gleicher Büschel angesehen werden *1).

Schneiden wir die beiden Büschel durch eine Transversale s; wir erhalten zwei übereinander liegende projectivische Punkt-

*) Baltzer, Stereometrie, S. 160.

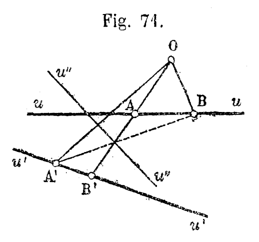
*1) Chasles, loc. cit., Nr. 180.

reihen A B C ... und A′B′C′ ... ohne vereinigte Punkte. Legen wir durch s irgend eine Ebene σ'; in dieser Ebene kann man einen Punkt U der Art bestimmen (Nr. 83), dass man aus demselben die Strecken A A′, B B′, C C′ ... unter einem constanten Winkel projiciren kann; d. h. projicirt man aus U die beiden Punktreihen, so erhält man zwei einstimmig gleiche Büschel. Setzt man nun das Auge in irgend einen Punkt der Geraden O U und projicirt die gegebenen Büschel aus diesem Punkte auf die Ebene σ', so erhält man genau die beiden einstimmig gleichen Büschel.

§ 12. **Involution.**

92. In Fig. 71 sei O das gemeinsame Centrum von zwei projectivischen Strahlenbüscheln, die beziehungsweise durch die Transversalen u und u' geschnitten werden, welche so

Fig. 71.



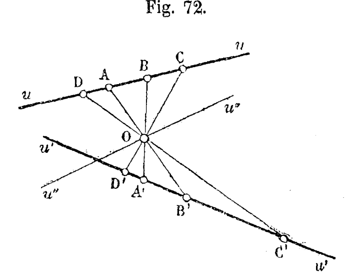
zwei projectivische Punktreihen A B C ... A′B′C′ ... bestimmen; u'' sei die Gerade, auf welcher sich die Paare der Geraden A B′ und A′B, ... (Nr. 67 links) schneiden. Ein (nicht entsprechend gemeinschaftlicher) Strahl, der beliebig durch O gezogen wird, schneidet u und u' in zwei nicht entsprechenden Punkten A und B′ und trifft u'' in einem Punkte der Geraden A′B. Dem Strahle O A des ersten Büschels entspricht folglich der Strahl O A′ des zweiten Büschels und dem Strahle O B′ des zweiten entspricht der Strahl O B des ersten. Mit anderen Worten, dem Strahle O A oder O B′ entsprechen zwei verschiedene Strahlen O A′ oder O B, je nachdem man den ersten Strahl als dem ersten oder zweiten Büschel angehörend betrachtet. In der That muss die Gerade A′B die andere A B′ auf u'' schneiden und kann nicht durch den Punkt O gehen, so lange dieser Punkt nicht auf u'' liegt.

In zwei übereinander liegenden projectivischen Gebilden *) (der ersten Stufe) entsprechen, im Allgemeinen, demselben Elemente zwei verschiedene Elemente, je nachdem das erste als Element des einen oder des anderen Gebildes angesehen wird.

Wir sagen im Allgemeinen, weil im Vorangehenden vorausgesetzt wird, es liege O nicht auf u''.

93. Liegt aber O auf u'' (Fig. 72) und zieht man durch O einen beliebigen Strahl, der u und u' in A und B' schneidet, so wird auch A'B durch O gehen; mit andern Worten,

Fig. 72.



dem Strahl OA oder OB' entspricht derselbe Strahl OA' oder OB; wir drücken diese Eigenschaft aus, indem wir sagen: die beiden Strahlen entsprechen sich doppelt, oder auch: die beiden Strahlen sind conjugirt.

Setzen wir umgekehrt voraus, dass zwei concentrische projectivische Strahlenbüschel ein Paar sich doppelt entsprechende (conjugirte) Strahlen haben. Schneiden wir die beiden Büschel durch zwei Transversalen u und u' und bezeichnen wir mit A und B' die Schnittpunkte mit dem ersten Strahl,

*) Wir sagen zwei Gebilde, weil die Ueberlegung, die wir an zwei concentrischen Strahlenbüscheln gemacht haben, ebenso an zwei übereinander liegenden Punktreihen oder an zwei Ebenenbüscheln mit gemeinsamer Axe gemacht werden kann. Man kommt zu demselben Resultat, wenn man die beiden Strahlenbüschel durch eine Transversale schneidet oder wenn man sie aus einem Punkte projicirt, der nicht in ihrer Ebene liegt.

so wird der zweite Strahl in B und A′ geschnitten. Die Gerade u'', das ist der Ort des Schnittpunktes der den projectivischen Punktreihen u und u' angehörenden Linienpaare MN′ und M′N (Nr. 67), wird durch O gehen, weil sich die Geraden AB′ und A′B in diesem Punkte schneiden. Ziehen wir durch O irgend einen anderen Strahl, der die Transversalen in C und D′ z. B. schneidet, so geht auch C′D durch O, d. h. die Strahlen OCD′ und ODC′ entsprechen sich ebenfalls doppelt.

Wenn also zwei übereinander liegende projectivische Gebilde (der ersten Stufe) ein Paar sich doppelt entsprechende Elemente haben, so entsprechen sich auch alle anderen Paare entsprechender Elemente doppelt.

94. Dieser besondere Fall von zwei übereinander liegenden projectivischen Gebilden (der ersten Stufe) heisst Involution *). Es ist eine Involution von Punkten, Strahlen oder Ebenen, je nachdem die Elemente Punkte einer Geraden, Strahlen eines Strahlenbüschels oder Ebenen eines Ebenenbüschels sind.

In der Involution sind also die Elemente paarweise conjugirt, d. h. jedes Element hat sein conjugirtes. Betrachtet man das erste als dem einen oder anderen Gebilde angehörend, so ist sein entsprechendes Element im einen und im andern Fall sein conjugirtes. Daraus folgt, dass es nicht nöthig ist, die beiden Gebilde als verschiedene zu betrachten und dass man die Involution als eine Reihe von paarweise conjugirten Elementen auffassen kann.

Bilden AA′, BB′, CC′... eine Involution, so ist damit ausgedrückt, dass A und A′, B und B′, C und C′... conjugirte Elemente sind; übrigens kann jedes Element mit seinem

---

*) Desargues, Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan (Paris, 1639): Edition Poudra (Paris, 1864), Bd. I, S. 119.

conjugirten vertauscht werden, es sind also die beiden Gebilde

$$AA'BB'CC'\ldots$$

und

$$A'AB'BC'C\ldots$$

projectivisch.

95. Da die Involution nur ein besonderer Fall von zwei übereinander liegenden projectivischen Gebilden ist, so gibt jeder Schnitt und jede Projection einer Involution eine neue Involution *).

Zwei conjugirte Elemente der gegebenen Involution liefern zwei conjugirte Elemente der neuen Involution. Daraus folgt (Nr. 15), dass die collineare Figur einer Involution auch eine Involution ist.

96. Bilden zwei übereinander liegende projectivische Punktreihen eine Involution, so entspricht einem jeden Punkte, folglich auch dem unendlich fernen Punkte (I oder J′), ein einziger Punkt (I′ oder J), d. h. die beiden Fluchtpunkte I′ und J coincidiren in einen einzigen Punkt, den wir O nennen wollen; dieser Punkt O ist also der conjugirte Punkt des unendlich fernen Punktes. Die Gleichung (1) von Nr. 83 wird also

$$OA \,.\, OA' = \text{const.}$$

Mit andern Worten, eine Involution von Punkten wird durch Paare von Punkten A, A′ gebildet, welche die Eigenschaft haben, dass das Product ihrer Abstände von einem festen Punkte O (der gegebenen Geraden) constant ist *1). Der Punkt O heisst das Centrum oder der Centralpunkt der Involution.

Die entsprechend gemeinschaftlichen Elemente zweier involutorischen Gebilde heissen Doppelelemente der Involution. Für die Involution AA′, BB′, ... hat man

$$OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB' = \ldots = \text{const.};$$

---

*) Desargues, loc. cit., S. 147.

*1) Desargues, loc. cit., S. 112 und 119.

ist diese Constante positiv, d. h. fällt O nicht zwischen zwei conjugirte Punkte, so gibt es zwei Doppelpunkte E und F, der Art, dass

$$\overline{OE}^2 = \overline{OF}^2 = OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB' = \ldots;$$

O ist also die Mitte des Segmentes EF und alle Gruppen EFAA′, EFBB′,... sind harmonisch (Nr. 56, 3). Also:

Hat eine Involution zwei Doppelelemente, so trennen diese irgend zwei conjugirte Elemente harmonisch, oder eine Involution wird durch Paare von Elementen gebildet, die mit zwei festen Elementen harmonische Gruppen ausmachen.

Ist die Constante negativ, d. h. fällt O zwischen zwei conjugirte Punkte, so sind keine Doppelpunkte vorhanden. In diesem Falle gibt es zwei gleich weit von O entfernte, conjugirte Punkte, für welche man hat:

$$OE = -OE' \text{ und } \overline{OE}^2 = \overline{OE'}^2 = -OE \,.\, OE' = -OA \,.\, OA'.$$

Ist die Constante Null, so ist ein einziger Doppelpunkt O, aber keine eigentliche Involution mehr vorhanden; da nämlich das Product OA . OA′ Null ist, so coincidirt in jedem Paare conjugirter Punkte der eine mit O.

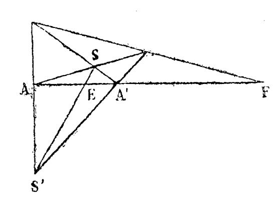
97. Man kann auch auf folgende Art zeigen, dass in jeder Involution mit zwei Doppelelementen diese durch je zwei conjugirte Elemente harmonisch getrennt sind.

Sind E und F die beiden Doppelelemente, A und A′ zwei conjugirte Elemente, so wird die Gruppe EFAA′ projectivisch zu der Gruppe EFA′A; also (Nr. 65) ist eine dieser Gruppen harmonisch. Ein dritter Beweis ist der folgende:

Betrachten wir EAA′... und EA′A als zwei projectivische Punktreihen und projiciren wir sie beziehungsweise aus zwei Punkten S und S′, die mit E in gerader Linie liegen (Fig. 73). Die projicirenden Büschel S (EAA′...) und S′ (EA′A...) sind perspectivisch (des entsprechend gemeinschaftlichen Strahles SS′E wegen); also enthält die Gerade, welche den Schnittpunkt von SA und S′A′ mit dem Schnitt-

punkt von SA' und $S'A$ verbindet, die Durchschnitte aller Paare entsprechender Strahlen und trifft folglich die gegebene Gerade in dem zweiten Doppelpunkt F. Nun aber gibt uns die Figur ein vollständiges Vierseit, in welchem die Diagonale AA' durch die beiden andern Diagonalen in E und F harmonisch geschnitten wird (Nr. 49); $EFAA'$ ist also ein harmonisches Gebilde.

Fig. 73.



Obiger Satz ist ein besonderer Fall von demjenigen in Nr. 83. Wir schliessen daraus, dass die Elementenpaare (Punkte einer Geraden, Strahlen oder Ebenen eines Büschels), welche mit zwei festen Elementen ein constantes Doppelverhältniss bilden, zwei übereinander liegende projectivische Gebilde ausmachen, die in dem Fall, wo das Doppelverhältniss den Werth -1 hat, eine Involution vorstellen (Nr. 55).

98. Die Involution ist durch zwei Paare conjugirter Elemente bestimmt. Die gegebenen Paare sollen AA' und BB' sein. Nehmen wir ein beliebiges Element C, so wird man sein conjugirtes Element C' construiren, indem man nach Nr. 66 dafür sorgt, dass die Gruppen $AA'BC$ und $A'AB'C'$ projectivisch sind. Man sagt dann, die sechs Elemente AA', BB', CC' bilden eine Involution, d. h. sie sind drei Paare einer Involution.

Setzen wir voraus, es handle sich um eine Involution von Punkten, so nehmen wir ausserhalb der Geraden, in welcher sich AA' und BB' befinden, einen beliebigen Punkt G (Fig. 74), beschreiben die Kreise GAA' und GBB', die sich in einem zweiten Punkte H schneiden; der Durchschnittspunkt von GH und der gegebenen Geraden sei O. Wir haben dann vermöge einer bekannten Eigenschaft des Kreises

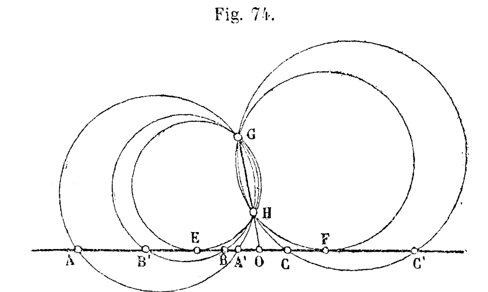
$$OG \,.\, OH = OA \,.\, OA' \text{ und } OG \,.\, OH = OB \,.\, OB'$$

und folglich

$$OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB'.$$

O ist also der Centralpunkt der durch die Paare AA′ und BB′ bestimmten Involution. Lässt man durch GH irgend

Fig. 74.



einen andern Kreis gehen, der die gegebene Gerade in CC′ schneidet, so haben wir

$$OG \,.\, OH = OC \,.\, OC';$$

folglich

$$OC \,.\, OC' = OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB',$$

d. h. CC′ ist ein Paar conjugirter Punkte der Involution. Mit andern Worten, der durch zwei conjugirte Punkte CC′ oder DD′ und durch einen der Punkte G und H gelegte Kreis geht immer durch den zweiten dieser Punkte. Oder:

Die Paare der conjugirten Punkte der Involution sind nichts anderes als die Durchschnittspunkte der gegebenen Geraden mit den durch die Punkte G und H gehenden Kreisen.

Nach dem Vorangehenden sieht man: wenn die Involution Doppelpunkte hat, so sind es die Berührungspunkte der gegebenen Geraden mit zwei durch GH gehenden Kreisen. Wir haben gesehen (Nr. 96), dass diese Punkte die Strecken AA′ und BB′ harmonisch theilen: also (Nr. 56) hat die Involution Doppelpunkte, wenn eines der Paare AA′ und BB′ ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des andern ist (Fig. 74); die Involution hat keine Dop-

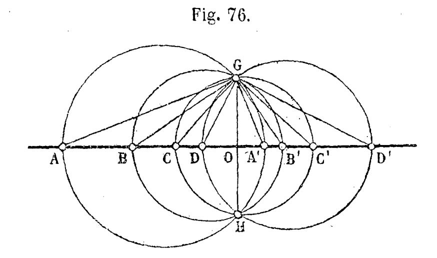
pelpunkte, wenn das eine Paar durch das andere getrennt wird (Fig. 75) *).

Im ersten Falle ist die Involution (wie schon bemerkt) aus einer unendlichen Anzahl von Punktepaaren gebildet, welche ein Paar fester Punkte harmonisch trennen.

Fig. 75.

Im zweiten Fall dagegen wird die Involution auf der gegebenen Geraden durch die Schenkel eines um seinen Scheitel beweglichen rechten Winkels ausgeschnitten. Denn da die Punkte AA' durch BB' getrennt sind (Fig. 76), so schneiden sich die über AA' und BB' als Durchmesser beschriebenen Kreise

Fig. 76.



in zwei Punkten G und H, die in Bezug auf die gegebene Gerade symmetrisch liegen; GH wird in dem Punkte O, dem Centralpunkt der Involution, unter rechten Winkeln halbirt. Daraus folgt, dass

$$\overline{OG}^2 = \overline{OH}^2 = AO \, . \, OA' = BO \, . \, OB',$$

und dass alle andern Kreise, welche durch G und H gehen und auf der gegebenen Geraden die andern Paare CC',

*) Wenn sich die Strecken AA' und BB' theilweise decken.

D D′, ... der Involution bezeichnen, ihre Mittelpunkte ebenfalls auf der Geraden A B ... haben; ihre Durchmesser sind die Strecken A A′, B B′, C C′, ... Projicirt man also aus dem Punkte G (oder aus H) die Strecken A A′, B B′, C C′, ... so erhält man eben so viele rechte Winkel A G A′, B G B′, C G C′, ... (oder A H A′, B H B′, C H C′, ...).

Wir schliessen daraus: wenn eine Involution von Punkten A A′, B B′, ... einer geraden Linie keine Doppelpunkte hat, d. h. wenn das Rechteck O A . O A′ eine negative Constante $-k^2$ ist, so werden alle Strecken A A′, B B′, ... aus jedem Punkte eines Kreises, der sein Centrum in O hat und dessen Ebene senkrecht auf der gegebenen Geraden steht, unter rechten Winkeln gesehen.

Dieser Satz ist ein besonderer Fall von dem Satze der Nr. 83. Wenn sich also ein Winkel von constanter Grösse in seiner Ebene um seinen Scheitel dreht, so bestimmen seine Schenkel auf einer festen Transversalen zwei projectivische Punktreihen, die in dem Falle in Involution stehen, wo der Winkel ein rechter ist.

99. Betrachten wir eine Involution von parallelen Strahlen, die sich also in unendlicher Ferne schneiden. Die unendlich ferne Gerade ist ein Strahl der Involution; der ihr conjugirte Strahl enthält den Centralpunkt der involutorischen Punktreihe, die durch irgend eine Transversale ausgeschnitten wird. Dieser Strahl kann darum Centralstrahl der gegebenen Involution genannt werden. Projicirt man umgekehrt eine involutorische Punktreihe mit Hülfe paralleler Strahlen, so bilden diese eine neue Involution, deren Centralstrahl durch den Centralpunkt der gegebenen Involution geht.

Wird mit Hülfe von Projectionen oder Schnitten (Nr. 95) aus einer Involution eine andere abgeleitet, so entstehen aus den Doppelelementen der ersten immer auch die Doppelelemente der zweiten.

100. Da in einer Involution eine beliebige Gruppe von Elementen zu der Gruppe der conjugirten Elemente projectivisch ist, so folgt: wenn man in einer Involution vier beliebige Punkte auswählt, so ist ihr Doppelverhältniss gleich demjenigen ihrer vier conjugirten Punkte. Ist z. B. die Involution A A′, B B′,

C C'... gegeben, so werden die Gruppen A B A' C' und A' B' A C projectivisch sein, es wird also

$$\frac{AA'}{BA'} : \frac{AC'}{BC'} = \frac{A'A}{B'A} : \frac{A'C}{B'C}$$

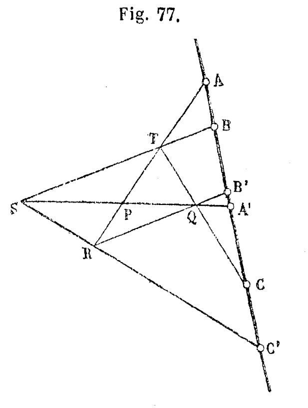
oder

$$AB' \,.\, BC' \,.\, CA' + A'B \,.\, B'C \,.\, C'A = 0.$$

Umgekehrt: findet diese Relation zwischen den durch die Punkte A A' B B' C C' einer Geraden begrenzten Strecken statt, so bilden diese Punkte involutorische Paare. Denn obige Relation bedingt die Gleichheit der Doppelverhältnisse (A B A' C') und (A' B' A C); diese Gruppen sind also projectivisch; aber A und A' entsprechen sich doppelt; also (Nr. 93), etc.

101. In einem vollständigen Viereck Q R S T (Fig. 77) werden die Gegenseiten R T und Q S, S T und Q R, Q T und R S durch eine beliebige Transversale in A und A', B und B', C und C' geschnitten; P sei der Durchschnittspunkt von Q S und R T. Dann ist A T P R die Projection

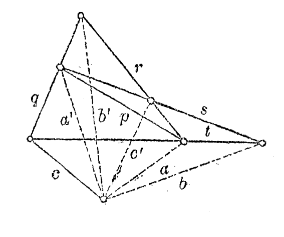
Fig. 77.



von A C A' B' aus dem Centrum Q und zugleich die Projection von A B A' C' aus dem Centrum S; also ist die Gruppe A C A' B' projectivisch zu A B A' C' oder

In einem vollständigen Vierseit $q\,r\,s\,t$ (Fig. 78) werden die Gegenecken $r\,t$ und $q\,s$, $s\,t$ und $q\,r$, $q\,t$ und $r\,s$ aus einem beliebigen Centrum durch die Strahlen a und a', b und b', c und c' projicirt; p sei die Verbindungslinie von $q\,s$ und $r\,t$. Die Strahlenbüschel $a\,t\,p\,r$ und $a\,c\,a'\,b$

Fig. 78.



sind projectivisch, denn sie sind perspectivisch (ihr gemeinsamer Schnitt ist q); ebenso sind $a\,t\,p\,r$ und $a\,b\,a'\,c'$ perspectivisch (ihr gemeinsamer Schnitt ist s). Also

(Nr. 38) zu A′ C′ A B. In den projectivischen Gruppen ACA′B′ und A′ C′ A B entsprechen sich die Punkte A und A′ doppelt, also (Nr. 93) sind A A′, B B′, C C′ drei Paare conjugirter Punkte einer Involution; oder:

Die drei Paare der Gegenseiten eines vollständigen Vierecks werden durch irgend eine Transversale in drei Paaren conjugirter Punkte einer Involution geschnitten *).

Mit andern Worten:

Verändert sich ein vollständiges Viereck der Art, dass fünf seiner Seiten durch eben so viele feste Punkte einer Geraden gehen, so dreht sich die sechste Seite um einen festen Punkt derselben Geraden, welcher mit den fünf ersten eine Involution bildet.

ist der Büschel $a\,c\,a'\,b'$ projectivisch zu $a\,b\,a'\,c'$ oder (Nr. 38) zu $a'\,c'\,a\,b$. In den projectivischen Gruppen $a\,c\,a'\,b'$ und $a'\,c'\,a\,b$ entsprechen sich die Strahlen a und a' doppelt, also sind (Nr. 93) $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$ drei Paare conjugirter Strahlen einer Involution; oder:

Die drei Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits werden aus einem beliebigen Punkte durch drei Paare conjugirter Strahlen einer Involution projicirt.

Mit andern Worten:

Verändert sich ein vollständiges Vierseit der Art, dass fünf seiner Eckpunkte auf fünf Geraden fortgleiten, die in einem Punkte zusammenlaufen, so bewegt sich der sechste Punkt auf einer festen durch denselben Punkt gehenden Geraden; die sechs Strahlen bilden drei Paare einer Involution.

Combinirt man den vorhergehenden Satz (links) mit dem Satz Nr. 100, so ergibt sich *1):

Durchschneidet eine Transversale die drei Paare der Gegenseiten eines vollständigen Vierecks in A und A′, B und B′, C und C′, so sind die Segmente der Transversalen an folgende Relation gebunden:

$$AB' \,.\, BC' \,.\, CA' + A'B \,.\, B'C \,.\, C'A = o.$$

Bezeichnen wir in dem Satze rechts mit U und U′, V und

*) Desargues, loc. cit., S. 171.

*1) Pappus, loc. cit., Buch VII, S. 130.

V′, W und W′ die Gegenecken $r\,t$ und $q\,s$, $s\,t$ und $q\,r$, $q\,t$ und $r\,s$ des Vierseits $q\,r\,s\,t$ und mit A A′, B B′, C C′ die Durchschnittspunkte der Strahlen $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$ mit einer beliebigen Transversalen, so können wir mit Hülfe von Nr. 95 folgenden Satz aufstellen:

Die sechs Punkte A A′ . B B′ . C C′, welche man erhält, indem man die drei Paare der Gegenecken U U′, V V′, W W′ eines vollständigen Vierseits aus einem beliebigen Centrum und auf eine beliebige Gerade projicirt, bilden drei Paare einer Involution.

Setzen wir jetzt voraus, der Projectionsmittelpunkt G sei einer der beiden Durchschnittspunkte der beiden Kreise, die über den Diagonalen U U′ und V V′ als Durchmesser gezeichnet werden, so sind die Winkel A G A′ und B G B′ rechte, folglich ist (Nr. 98) auch der Winkel C G C′ ein rechter, d. h. der über W W′ als Durchmesser gezeichnete Kreis geht ebenfalls durch G. Oder:

Die drei Kreise, deren Durchmesser die drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits sind, haben eine und dieselbe Radicalaxe; ihre Mittelpunkte liegen auf einer geraden Linie, also:

Die Mittelpunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen auf einer geraden Linie *).

102. Aus dem Satze von Nr. 101 links ergibt sich die Construction des sechsten Punktes C′ einer Involution, wenn die fünf andern Punkte gegeben sind. Wir legen durch C irgend eine Gerade, auf welcher wir zwei Punkte Q und T nehmen und ziehen A T, B T, A′Q, B′Q; die Gerade, welche den Schnittpunkt R von A T und B′Q mit dem Schnittpunkte S von A′Q und B T verbindet, schneidet die gegebene Gerade in dem gesuchten Punkte C′.

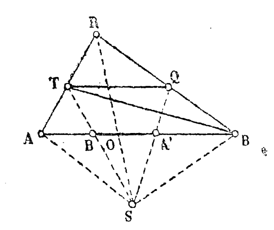
Aus dem Satze von Nr. 101 rechts ergibt sich die Construction des sechsten Strahles c' einer Involution, wenn die fünf andern Strahlen gegeben sind. Wir nehmen auf c irgend einen Punkt und legen durch denselben zwei Geraden q und t; dann verbinden wir den Punkt $t\,a$ mit dem Punkte $q\,b'$ und den Punkt $t\,b$ mit dem Punkte $q\,a'$; diese beiden Geraden schneiden sich in einem Punkte, der mit dem Centrum des gegebenen Büschels verbunden den gesuchten Strahl c' gibt.

*) Chasles, loc. cit., Nr. 344 und 345. — Gauss' Werke, t. 4, S. 391 von 810.

Ist der Punkt C in Aufgabe links in unendlicher Ferne, so ist sein conjugirter Punkt der Centralpunkt O der Involution. Um jetzt den Centralpunkt der Involution zu finden, von welcher man zwei Paare conjugirter Punkte A A′, B B′ gibt, construirt man ein vollständiges Viereck Q S T R (Fig. 79) der Art, dass zwei Gegenseiten durch A und A′, zwei andere Gegenseiten durch B und B′ gehen und dass die fünfte Seite der gegebenen Geraden parallel wird; die sechste Seite geht dann durch O.

Der sechste Punkt C′, der mit fünf gegebenen Punkten A A′ B B′ C eine Involution ausmacht, ist durch diese vollständig

Fig. 79.



bestimmt, d. h. es gibt nur einen einzigen Punkt C′, der diese Eigenschaft besitzt (Nr. 98). Es kann nämlich der Punkt C′ so angesehen werden, als sei er durch die Gleichheit der Doppelverhältnisse (A A′ B C) = (A′ A B′ C′) bestimmt; folglich (Nr. 54), etc. . . .

103. Man kann den Satz Nr. 101 auch umkehren und sagen:

Schneidet eine Transversale die Seiten eines Dreiecks RSQ (Fig. 77) in drei Punkten A′, B′, C′, die beziehungsweise mit drei anderen Punkten A, B, C derselben Geraden involutorische Paare bilden, so laufen die Geraden RA, SB, QC in einem Punkte T zusammen.

T sei der Schnittpunkt der Geraden R A und S B, und C_1 der Schnittpunkt der Transversalen und T Q; so hat man in Folge des vorhergehenden Satzes, angewandt auf das Viereck QRST,

$$(A A' B C_1) = (A' A B' C');$$

nach Voraussetzung aber ist

$$(A\,A'\,B\,C) = (A'\,A\,B'\,C');$$

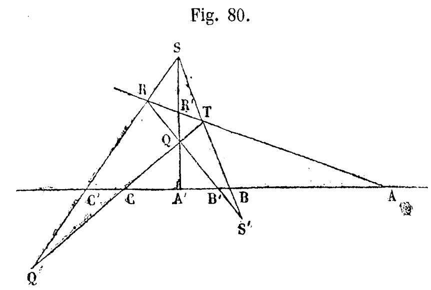
folglich (Nr. 54) coincidirt C_1 mit C, oder QC geht durch T.

Der correlative Satz heisst:

Projicirt man aus einem Punkte S die Eckpunkte eines Dreiseits *rsq* (Fig. 78) mit Hülfe der Strahlen a', b', c', die beziehungsweise mit drei anderen aus S gehenden Strahlen a, b, c involutorische Paare bilden, so liegen die Punkte ra, sb, qc auf derselben Geraden t.

104. In Fig. 80 sind R′, S′, Q′ die bezüglichen Schnittpunkte der Seiten SQ, QR, RS mit den Geraden RT, ST,

Fig. 80.



QT. Auf den Seiten des Dreiecks RSQ haben wir folgende Gruppen von je vier Punkten:

$$S\,Q\,R'\,A', \quad Q\,R\,S'\,B', \quad R\,S\,Q'\,C';$$

ihre Projectionen aus dem Punkte T auf die Transversale sind:

$$B\,C\,A\,A', \quad C\,A\,B\,B', \quad A\,B\,C\,C'.$$

Das Product der Doppelverhältnisse dieser letzteren Gruppen wird

$$\left(\frac{BA}{CA} : \frac{BA'}{CA'}\right)\left(\frac{CB}{AB} : \frac{CB'}{AB'}\right)\left(\frac{AC}{BC} : \frac{AC'}{BC'}\right),$$

oder

$$-\frac{CA' \,.\, AB' \,.\, BC'}{BA' \,.\, CB' \,.\, AC'};$$

nach Nr. 100 ist diese Grösse gleich — 1. Oder:

Werden die Seiten eines Dreiecks durch irgend eine Transversale geschnitten und die Eckpunkte

aus irgend einem andern Punkte auf die bezüglichen Gegenseiten projicirt, so ist das Product der Doppelverhältnisse der Gruppen von vier Punkten, welche man auf den drei Seiten erhält, gleich — 1.

Nehmen wir umgekehrt drei Punktenpaare $R'A'$, $S'B'$, $Q'C'$ so auf den Seiten eines Dreiecks RSQ an, dass das Product der Doppelverhältnisse $(SQR'A')$, $(QRS'B')$ und $(RSQ'C')$ gleich — 1 wird, so liegen die Punkte $A'B'C'$ in einer Geraden, wenn die Geraden RR', SS', QQ' in einem Punkte zusammenlaufen; und umgekehrt: liegen die Punkte $A'B'C'$ in derselben Geraden, so schneiden sich die Geraden RR', SS', QQ' in demselben Punkte.

Setzen wir voraus, die Transversale rücke in unendliche Ferne, so werden die Doppelverhältnisse $(SQR'A')$, $(QRS'B')$ und $(RSQ'C')$ (nach Nr. 54) beziehungsweise gleich $SR' : QR'$, $QS' : RS'$ und $RQ' : SQ'$. Oder *):

Treffen drei Geraden, die von demselben Punkte T aus durch die Eckpunkte eines Dreiecks RSQ gehen, die gegenüberliegenden Seiten in R', S' und Q', so hat man für die Seitenabschnitte die Relation

$$\frac{SR'}{QR'} \cdot \frac{QS'}{RS'} \cdot \frac{RQ'}{SQ'} = -1;$$

und umgekehrt: Nimmt man auf den Seiten eines Dreiecks RSQ die Punkte R', S' und Q' so an, dass obige Relation stattfindet, so treffen die Geraden RR', SS', QQ' in einem Punkte T zusammen.

Wiederholt man diesen Satz an zwei Punkten T' und T'', so erhält man auch:

Werden die Eckpunkte R, S und Q eines Dreiecks aus zwei Centren T' und T'' auf die gegenüberliegenden Seiten bezüglich in $R'S'Q'$ und $R''S''Q''$ projicirt, so ist das Product der Doppelverhältnisse $(SQR'R'')$, $(QRS'S'')$ und $(RSQ'Q'')$ gleich + 1.

Nehmen wir noch die Transversale ganz beliebig und

*) Satz des Ceva, De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio (Mediolani, 1678), I, S. 2. — Baltzer, Trigon., S. 360.

ziehen ST und QT beziehungsweise parallel QR und RS, dann gehen die Punkte S′ und Q′ ins Unendliche und R′ wird der Mittelpunkt von SQ (als Durchschnitt der Diagonalen QS und RT des Parallelogramms QRST). Es werden folglich die Doppelverhältnisse (SQR′A′), (QRS′B′) und (RSQ′C′) bezüglich gleich (Nr. 54): — (QA′ : SA′), RB′ : QB′ und SC′ : RC′. Oder *):

Schneidet eine Transversale die Seiten eines Dreiecks RSQ in A′, B′, C′, so hat man für die Seitenabschnitte die Relation

$$\frac{QA'}{SA'} \cdot \frac{RB'}{QB'} \cdot \frac{SC'}{RC'} = 1$$

und umgekehrt: nimmt man die drei Punkte A′B′C′ auf den Seiten eines Dreiecks RSQ so an, dass obige Relation stattfindet, so liegen diese drei Punkte in einer geraden Linie.

Wiederholt man diesen Satz an zwei Transversalen, so findet man:

Schneiden zwei Transversalen die Seiten eines Dreiecks RSQ bezüglich in A′B′C′ und A″B″C″, so ist das Product der Doppelverhältnisse (SQA′A″), (QRB′B″) und (RSC′C″) gleich + 1.

Nehmen wir umgekehrt auf den Seiten eines Dreiecks RSQ drei Punktenpaare A′A″, B′B″ und C′C″ der Art, dass das Product der Doppelverhältnisse (SQA′A″), (QRB′B″) und (RSC′C″) gleich + 1 wird, so liegen die Punkte A″B″C″ auf einer Geraden, wenn auch die Punkte A′B′C′ in einer Geraden liegen, und die Geraden RA″, SB″ und QC″ treffen in einem Punkte zusammen, wenn die Geraden RA′, SB′ und QC′ dasselbe thun.

105. Es wurde oben (93) gezeigt: wenn man zwei projectivische Punktreihen (ABC...) und (A′B′C′...) derselben Ebene aus den Durchschnittspunkten der Geraden, welche AB′ und A′B

---

*) Satz des Menelaus, Sphaerica, III, S. 1. — Baltzer, Trigon., S. 362.

oder AC' und $A'C\ldots$ oder BC' und $B'C\ldots$ entsprechen, projicirt, so bilden die projicirenden Strahlen eine Involution. Die correlativen Sätze heissen:

Sind zwei projectivische, aber nicht concentrische Strahlenbüschel $(a\,b\,c\ldots)$ und $(a'\,b'\,c'\ldots)$ in derselben Ebene gegeben und schneidet man sie durch die Verbindungslinie zweier Punkte, welche $a\,b'$ und $a'\,b$ oder $a\,c'$ und $a'\,c\ldots$ oder $b\,c'$ und $b'\,c$ analog sind, so erhält man involutorische Punktenpaare.

Sind zwei projectivische Ebenenbüschel $(\alpha\,\beta\,\gamma\ldots)$ und $(\alpha'\,\beta'\,\gamma'\ldots)$, deren Axen sich schneiden, gegeben und schneidet man sie durch eine Ebene (bestimmt durch zwei Geraden, welche $\alpha\,\beta'$ und $\alpha'\,\beta$, oder $\alpha\,\gamma'$ und $\alpha'\,\gamma\ldots$ oder $\beta\,\gamma'$ und $\beta'\,\gamma$ analog sind), so erhält man involutorische Strahlenpaare.

Hat man zwei projectivische Strahlenbüschel $(a\,b\,c\ldots)$ und $(a'\,b'\,c'\ldots)$ mit gleichem Centrum, aber in verschiedenen Ebenen und projicirt man sie aus einem Punkte, der zwei der Ebenen $a\,b'$ und $a'\,b$, $a\,c'$ und $a'\,c\ldots$ $b\,c'$ und $b'\,c$ gemeinschaftlich ist, so bilden die projicirenden Ebenen eine Involution.

106. Besondere Fälle. Alle Punktenpaare einer Geraden, die von einem festen Punkte dieser Geraden gleich weit abstehen, bilden eine Involution, weil jedes Paar durch den festen Punkt und den unendlich fernen Punkt harmonisch getrennt ist.

Ist umgekehrt der unendlich ferne Punkt eines der Doppelelemente einer Involution von Punkten, so hat jedes Paar der conjugirten Punkte seine Mitte auf dem anderen Doppelpunkt. Haben in einer Involution zwei Paare conjugirter Punkte $A\,A'$ und $B\,B'$ denselben Mittelpunkt, so ist dieser auch die Mitte von jedem anderen Paare $C\,C'$.

Alle geradlinigen Winkel, welche denselben Scheitel haben, in derselben Ebene liegen und durch dieselbe feste Gerade halbirt werden, bilden eine Involution, weil die Schenkel eines jeden Winkels durch die gemeinsame Halbirungslinie und den darauf senkrechten Strahl harmonisch getrennt sind.

Sind umgekehrt die Doppelelemente eines involutorischen Strahlenbüschels zwei senkrechte Linien, so bilden die conjugirten Strahlen eines jeden Paares mit jedem der beiden Doppelstrahlen gleiche Winkel.

Wenn in einer Involution die Winkel von zwei Paaren conjugirter Strahlen $a\,a'$ und $b\,b'$ dieselben Halbirungslinien haben,

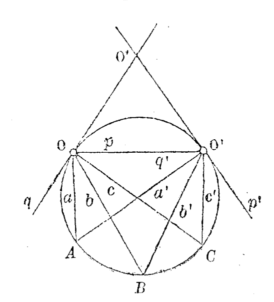
so halbiren diese auch den Winkel irgend eines anderen Paares $c\,c'$.

Alle Flächenwinkel mit gemeinsamer Kante und gemeinsamer Halbirungsebene bilden eine Involution; denn die Seiten eines jeden Flächenwinkels sind durch die feste Ebene und die auf ihr senkrechte, durch die gemeinsame Kante gehende, Ebene harmonisch getrennt. Umgekehrt: sind die Doppelelemente einer Involution von Ebenen zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen, so bilden die conjugirten Ebenen eines jeden Paares mit jeder der Doppelebenen gleiche Winkel, etc.

§ 13. **Projectivische Gebilde am Kreise.**

107. In einer Ebene sind zwei (einstimmig) gleiche Strahlenbüschel $a\,b\,c\,d\ldots$, $a'\,b'\,c'\,d'\ldots$ mit den Centren O und O' (Fig. 81) gegeben. Der Winkel, den zwei entsprechende Strahlen $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'\ldots$ mit einander bilden, ist constant (Nr. 80): folglich ist der geometrische Ort des Durchschnittspunktes zweier entsprechender Strahlen ein durch O und O'

Fig. 81.



gehender Kreis *). Die Tangente an den Kreis im Punkte O bildet mit der Sehne O O' einen Winkel, der so gross ist wie jeder der Winkel O A O', O B O', O C O'...; aber der Strahl O' O des zweiten Büschels muss den gleichen Winkel mit dem entsprechenden Strahl des ersten Büschels bilden, also ist gerade die Tangente in O dieser Strahl q des ersten Büschels, der dem Strahle q' des zweiten Büschels oder der Sehne O' O entspricht.

---

*) Baltzer, Planim., S. 26.

Stellen wir uns vor, der bewegliche Punkt A durchlaufe die Kreislinie; dann beschreiben die beweglichen Strahlen A O und A O′ oder a und a' die beiden Strahlenbüschel; ist A sehr nahe bei O, so kommt auch der Strahl A O′ ganz nahe an O O′ oder q' und der Strahl A O fällt sehr nahe auf q oder die Tangente in O. Das stimmt mit der Definition der Tangente in O überein: Die Tangente in O verbindet diesen Punkt mit dem unendlich nahe liegenden Punkte der Peripherie.

Ebenso entspricht dem Strahl O O′ oder p des ersten Büschels der Strahl p' oder die Tangente an den Kreis in O′ des zweiten Büschels.

108. Umgekehrt, projicirt man eine beliebige Anzahl Punkte A, B, C, D, ... eines Kreises aus zwei Punkten O und O′ desselben Kreises, so erzeugen die projicirenden Strahlen O (A, B, C, D, ...) und O′ (A, B, C, D, ...) zwei einstimmig gleiche Büschel, da die Winkel A O B und A O′B, A O C und A O′C, ... B O C und B O′C, ... gleich sind; diese Büschel sind also projectivisch (Nr. 78). Mit andern Worten: sind die Punkte A, B, C, ... fest, während das Centrum des Büschels auf der Peripherie fortgleitet, so bleibt der Büschel stets sich selbst gleich und folglich projectivisch.

Derjenige Strahl, der aus dem Punkte O eben diesen Punkt O oder, genauer, den unendlich nahe liegenden Punkt des Kreises, projicirt, ist die Tangente in O. Daraus folgt, dass in den projectivischen Büscheln O (A, B, C, ...) und O′ (A, B, C, ...) die Tangente in O derjenige Strahl des ersten Büschels ist, der dem Strahle O′ O des zweiten entspricht.

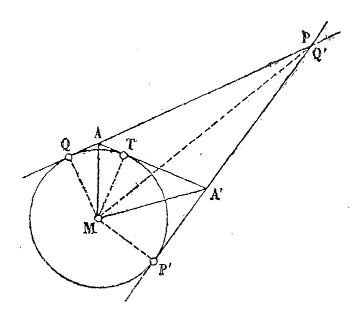
109. Wir wissen, dass in zwei projectivischen Gebilden je vier harmonische Elemente des einen und des andern einander entsprechen (Nr. 58); daraus folgt: wenn vier Strahlen O (A, B, C, D) harmonisch sind, so ist auch die Gruppe O′ (A, B, C, D) harmonisch, welches auch die Lage des Punktes O′ auf dem Kreise sei. Lassen wir O′ mit dem A unendlich nahe liegenden Punkte coincidiren, so wird auch die

aus der Tangente in A und den Sehnen AB, AC, AD gebildete Gruppe harmonisch sein. Ebenso ist der aus der Tangente in B und den Sehnen BA, BC, BD zusammengesetzte Büschel harmonisch, etc.

Man sagt in diesem Falle: die vier Punkte ABCD des Kreises sind harmonisch *).

110. Sind PQ und P'Q' zwei feste Tangenten eines Kreises um den Mittelpunkt M (Fig. 82) und AA' eine veränderliche, durch die festen Tangenten begrenzte Berührungs-

Fig. 82.



linie, so ist der Winkel AMA' constant. Denn sind Q, P', T die Berührungspunkte, so hat man:

$$\text{Winkel } AMA' = AMT + TMA' = \tfrac{1}{2}\, QMT + \tfrac{1}{2}\, TMP' = \tfrac{1}{2}\, QMP' \text{ *1)}.$$

Bewegt sich also die Gerade AA' zwischen den festen Tangenten, so erzeugen die Strahlen MA und MA' zwei projectivische Büschel (Nr. 82); die Punkte A und A' beschreiben folglich zwei projectivische Punktreihen. Oder:

Die Tangenten an den Kreis bezeichnen auf zwei festen Tangenten zwei projectivische Punktreihen.

Da der Winkel $AMA' = \frac{1}{2}$ QMP', d. h. gleich jedem der Winkel QMQ' und PMP' ist (wo P und Q' denselben Punkt bezeichnen, einmal als Punkt der ersten, das andere-

*) Steiner, loc. cit., S. 157, § 43.

*1) Baltzer, Planim., S. 44.

mal als Punkt der zweiten festen Tangente angesehen), so sind Q und Q′, P und P′ entsprechende Punkte der beiden projectivischen Punktreihen; oder die Berührungspunkte der beiden festen Tangenten entsprechen dem Schnittpunkt derselben.

Stellen wir uns vor, der Kreis werde von der beweglichen Tangente durchlaufen (umhüllt), so erzeugen die Punkte A und A′ die beiden projectivischen Punktreihen; ist die bewegliche Tangente sehr nahe an PQ, so kommt der Punkt A′ sehr nahe an Q′ und der Punkt A kommt sehr nahe an den, Q′ entsprechenden, Punkt Q, d. h. an den Berührungspunkt von PQ. Folglich

muss man den Berührungspunkt einer Tangente als den Schnittpunkt derselben mit der unendlich nahe liegenden Tangente ansehen.

111. Der vorhergehende Satz drückt aus, dass vier Tangenten $abcd$ eines Kreises von einer fünften in vier Punkten ABCD geschnitten werden, deren Doppelverhältniss constant ist, wie man auch diese fünfte Tangente lege.

Die fünfte Tangente kann unendlich nahe an einer der vier festen Tangenten, z. B. an a liegen; dann ist A der Berührungspunkt von a und B, C, D sind die Durchschnitte ab, ac, ad.

Schneiden als besonderen Fall $abcd$ die Tangente PQ in vier harmonischen Punkten, so bilden auch die Durchschnitte von $abcd$ mit jeder anderen Tangente an den Kreis eine harmonische Gruppe. Die aus dem Berührungspunkt von a und den Schnittpunkten ab, ac, ad gebildete Gruppe ist harmonisch. Man sagt in diesem Falle: die vier Tangenten $abcd$ sind harmonisch *).

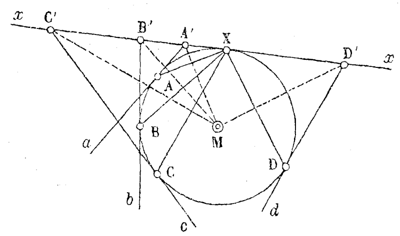
112. In Fig. 83 sind A, B, C, ... X Punkte des Kreises und a, b, c, ... x die entsprechenden Tangenten. Projicirt man aus dem Centrum des Kreises die Punkte A′, B′, C′, ...

---

*) Steiner, loc. cit., S. 157, § 43.

in welchen die Tangente x von den Tangenten a, b, c,... geschnitten wird, so stehen die projicirenden Strahlen beziehungsweise senkrecht auf den Sehnen XA, XB, XC,... und bilden folglich (Nr. 82) einen Büschel, der dem Büschel

Fig. 83.



X (A, B, C,...) gleich ist. Also ist die Punktreihe A′B′C′... projectivisch zu dem Büschel X (ABC...) *) oder:

Die Punktreihe, welche mehrere gegebene Tangenten eines Kreises auf einer beliebigen Tangente bestimmen, ist projectivisch zu dem Strahlenbüschel, welcher ihre Berührungspunkte aus einem beliebigen Punkte desselben Kreises projicirt.

Daraus folgt als specieller Fall: wenn X (ABCD) eine harmonische Gruppe ist, so ist auch A′B′C′D′ eine harmonische Gruppe oder:

Sind vier Punkte eines Kreises harmonisch, so sind auch die Tangenten in diesen Punkten harmonisch und umgekehrt.

§ 14. Projectivische Gebilde an den Kegelschnitten.

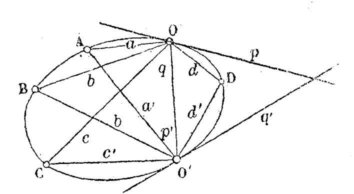
113. Construiren wir diejenigen Figuren, welche zu denen der Sätze Nr. 108, 110 und 112 collinear sind. Den Punkten und Tangenten des Kreises werden die Punkte und Tangenten eines Kegelschnittes entsprechen (Nr. 19). Die Tangente an einem Kegelschnitt ist also die Gerade, welche die Curve in zwei unendlich nahe liegenden Punkten schneidet; ein Punkt der Curve ist der Schnitt zweier unendlich

*) Baltzer, Trigonometrie, S. 376—378.

nahe liegender Tangenten; zwei gleichen und darum projectivischen Büscheln werden zwei projectivische Büschel entsprechen und zwei projectivischen Punktreihen werden ebenfalls zwei projectivische Punktreihen entsprechen; zwei Büschel oder zwei Punktreihen, die sich in zwei collinearen Figuren entsprechen, sind in der That zwei perspectivische Gebilde. Es ergeben sich also folgende Sätze:

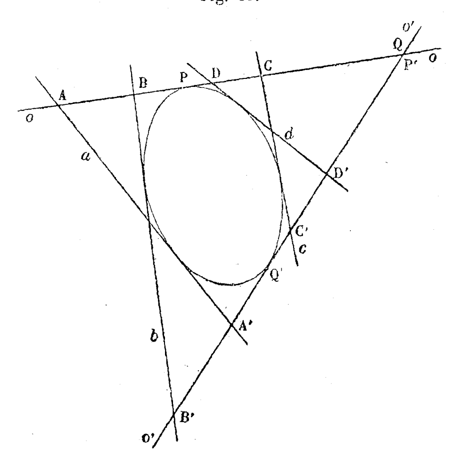
I. Projicirt man eine beliebige Anzahl von Punkten A, B, C, D,... eines Kegelschnittes aus zwei festen Punkten O und O′ derselben Curve (Fig. 84), so bilden die projicirenden Strahlen O (A, B, C, D,...)

Fig. 84.



und O′ (A, B, C, D,...) zwei projectivische Strahlenbüschel. Dem Strahle OO′ des ersten Büschels ent-

Fig. 85.

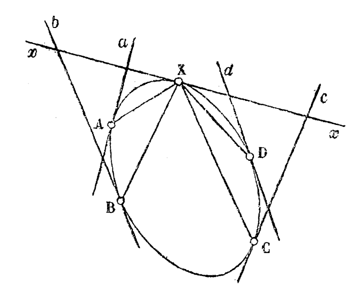


spricht die Tangente in O′ und dem Strahle O′O des zweiten Büschels entspricht die Tangente in O.

II. Eine beliebige Anzahl von Tangenten a, b, c, d,... an einem Kegelschnitt bestimmen auf zwei festen Tangenten o und o' (Fig. 85) zwei projectivische Punktreihen. Dem Punkte oo' oder Q der ersten Punktreihe entspricht der Berührungspunkt Q' von o' und demselben Punkte $o'o$ oder P' der zweiten Reihe entspricht der Berührungspunkt P von o *).

III. Die Punktreihe, welche eine bewegliche Tangente an einen Kegelschnitt auf einer festen

Fig. 86.



Tangente bestimmt, ist projectivisch zu dem Strahlenbüschel, welcher den veränderlichen Berührungspunkt aus einem beliebig angenommenen festen Punkte desselben Kegelschnittes projicirt (Fig. 86).

114. Beweisen wir nun die Umkehrungen der beiden Lehrsätze I und II.

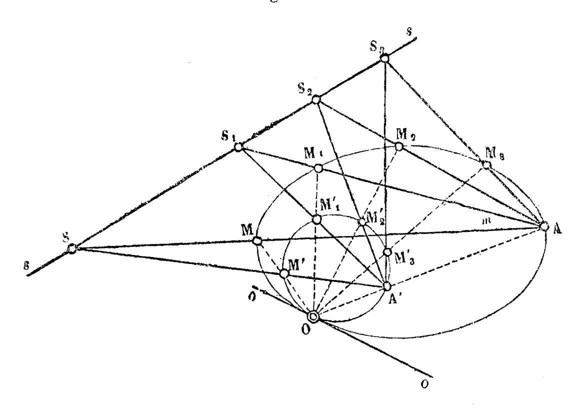
I'. Sind zwei (nicht concentrische) Strahlenbüschel in derselben Ebene projectivisch (nicht aber perspectivisch), so ist der geometrische Ort des Schnittpunktes zweier entsprechender Strahlen ein Kegelschnitt, der durch die Centren der beiden Büschel geht; die Tangenten in diesen Punkten sind diejenigen Strahlen der beiden Büschel, welche

*) Steiner, loc. cit., S. 139, § 38.

der geraden Verbindungslinie ihrer Centren entsprechen.

Beweis *). Die Centren der beiden projectivischen Büschel O ($M_1 M_2 M_3 \ldots$) und A ($M_1 M_2 M_3 \ldots$) (Fig. 87) seien O und A, die Paare entsprechender Strahlen also OM_1 und AM_1, OM_2 und AM_2, OM_3 und $AM_3 \ldots$ Der Ort der Punkte $M_1 M_2 M_3 \ldots$ geht durch den Punkt O, weil der Strahl AO

Fig. 87.



des Büschels A und der entsprechende Strahl des Büschels O sich in O schneiden. Ebenso ist A ein Punkt des Ortes.

Der Strahl *o* des Büschels O entspreche dem Strahle AO des Büschels A. Ziehen wir einen Kreis, der die Gerade *o* im Punkte O berühre; sein Schnittpunkt mit OA sei A′. Sind ebenso $M_1' M_2' M_3' \ldots$ die Schnittpunkte von OM_1, OM_2, $OM_3 \ldots$ mit dem Kreise, so sind die Büschel O ($M_1' M_2' M_3' \ldots$) und A′ ($M_1' M_2' M_3' \ldots$) einstimmig gleich und da, nach Voraussetzung, O ($M_1' M_2' M_3' \ldots$) oder O ($M_1 M_2 M_3 \ldots$) und A ($M_1 M_2 M_3, \ldots$) projectivisch sind, so sind es auch die Büschel A′ ($M_1' M_2' M_3' \ldots$) und A ($M_1 M_2 M_3 \ldots$); die beiden letzteren aber sind perspectivisch (Nr. 62), weil der Strahl A′O dem Strahle AO entspricht, folglich schneiden sich ihre entsprechenden Strahlen in Punkten S_1, S_2, $S_3, \ldots$ einer Geraden *s*.

---

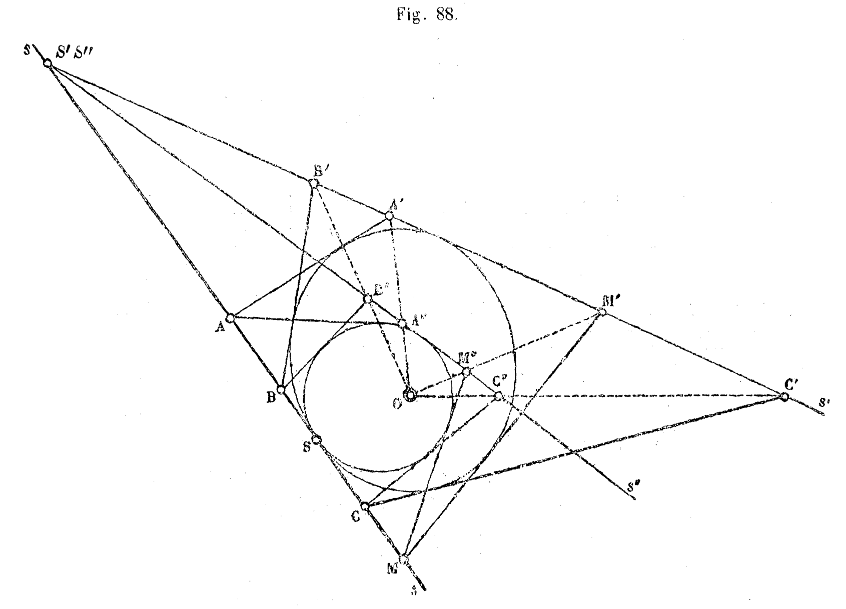
*) Beweis von Ed. Dewulf.

Um also denjenigen Punkt des gesuchten Ortes zu construiren, der auf einem beliebigen Strahle m des Büschels A liegt, hat man nur m bis zu dem Schnittpunkt S mit s zu verlängern, den Schnittpunkt M′ von SA′ mit dem Kreise zu bilden und M′O zu ziehen; dann ist der Schnittpunkt von OM′ und m der gesuchte Punkt M.

Diese Construction ist nun genau dieselbe, welche wir in Nr. 19 (Fig. 10) angewandt haben, um die collineare Curve eines Kreises zu finden, wenn die Axe s und das Centrum O der Collineation und zwei entsprechende Punkte A und A′ gegeben sind. Der Ort der Punkte M ist also ein Kegelschnitt.

II′. Sind zwei (nicht übereinanderliegende) gerade Punktreihen in derselben Ebene projectivisch

Fig. 88.



(nicht aber perspectivisch), so umhüllen die geraden Verbindungslinien entsprechender Punkte einen Kegelschnitt, d. h. sie sind Tangenten eines solchen. Dieser Kegelschnitt berührt die beiden

gegebenen Geraden in denjenigen Punkten, welche ihrem Schnittpunkte entsprechen.

Beweis *): Die projectivischen Punktreihen seien s und s'; die Paare entsprechender Punkte A und A′, B und B′, C und C′... Die Umhüllungscurve der Geraden AA′, BB′, CC′... berührt auch die Gerade s, welche den Punkt ss' oder S′ der zweiten Punktreihe mit dem Punkte S der ersten verbindet. So ist auch s' eine zweite Tangente.

Beschreiben wir einen Kreis, der s in S berühre und legen daran die Tangenten a'', b'', $c''\ldots s''$ aus den Punkten A, B, C...S′; diese Tangenten a'', b'', $c''\ldots$ werden auf s'' eine Punktreihe bezeichnen, die zu s und folglich auch zu s' projectivisch ist. Der Punkt S′ aber entspricht sich selbst in den Punktreihen s' und s'', also sind diese perspectivisch (Nr. 62) und die Geraden A″A′, B″B′, C″C′,... laufen in einem Punkte O zusammen. Will man also denjenigen Punkt M′ von s' construiren, der einem beliebigen Punkte M von s entspricht, so hat man nur aus M eine Tangente m an den Kreis zu legen und den Schnittpunkt M″ von m und s'' mit O zu verbinden, dann wird diese Gerade OM″ die Gerade s' in M′ treffen. Die Gerade MM′ wird eine neue Tangente an die Curve sein. Da nun diese Construction genau dieselbe ist, wie diejenige, welche wir in Nr. 19, Fig. 10′, angenommen haben, um die collineare Figur eines Kreises zu finden, wenn die Collineationsaxe s eine Tangente an diesen Kreis, das Collineationscentrum ein beliebiger Punkt O und s' und s'' zwei entsprechende Geraden sind. Die Umhüllungscurve der Geraden MM′ ist also ein Kegelschnitt.

Die Lehrsätze I′ und II″ dieser Nummer sind correlativ (27), denn die aus den Schnittpunkten der entsprechenden Strahlen zweier projectivischer Büschel gebildete Figur ist correlativ zu der aus den Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier projectivischer Punktreihen gebildeten Figur. Also entsprechen (nach dem Reciprocitätsgesetz

*) Beweis von Ed. Dewulf.

der Ebene) in zwei correlativen Figuren den Punkten eines Kegelschnittes die Tangenten eines anderen Kegelschnittes.

115. Mit Rücksicht auf Nr. 58 und 61 können die Lehrsätze der Nummern 113 und 114 auch so ausgedrückt werden:

Das Doppelverhältniss der vier Geraden, welche vier feste Punkte eines Kegelschnittes mit einem veränderlichen Punkte dieser Curve verbinden, ist constant.

Das Doppelverhältniss der vier Punkte, in welchen vier feste Tangenten eines Kegelschnittes von einer veränderlichen Tangente derselben Curve geschnitten werden, ist constant *).

Man nennt Doppelverhältniss von vier gegebenen Punkten ABCD eines Kegelschnittes das Doppelverhältniss der vier Geraden O (A, B, C, D), wo O ein beliebiger Punkt des Kegelschnittes ist. Man nennt Doppelverhältniss von vier gegebenen Tangenten $abcd$ eines Kegelschnittes das Doppelverhältniss der vier Punkte o (a, b, c, d), wo o eine beliebige Tangente des Kegelschnittes ist.

Das Doppelverhältniss von vier Tangenten eines Kegelschnittes ist gleich dem Doppelverhältniss ihrer Berührungspunkte *1).

Der Ort eines Punktes, aus welchem man vier gegebene Punkte ABCD durch Strahlen projiciren kann, deren Doppelverhältniss einem gegebenen gleich wird, ist ein Kegelschnitt, der durch die gegebenen Punkte geht.

Die Tangente in einem dieser Punkte, A z. B. ist eine Gerade, welche mit AB, AC, AD eine Gruppe bildet, deren Doppelverhältniss dem gegebenen gleich ist.

Wird eine Curve von Geraden umhüllt, die von vier gegebenen Geraden in vier Punkten geschnitten

---

*) Steiner, loc. cit., S. 156, § 43.

*1) Chasles, Géom. sup., Nr. 663.

sind, deren Doppelverhältniss dasselbe bleibt, so ist jene Curve ein Kegelschnitt, der die gegebenen Geraden berührt.

Der Berührungspunkt einer dieser Geraden a z. B. bildet mit den Punkten ab, ac, ad eine Gruppe, deren Doppelverhältniss den gegebenen Werth hat *).

116. Durch fünf beliebige Punkte O, O′, A, B, C (Fig. 84) (einer Ebene), von denen nicht mehr als zwei in einer Geraden liegen, kann man einen Kegelschnitt legen. Denn es wird genügen, die projectivischen Büschel zu construiren, deren Centren zwei der gegebenen Punkte O und O′ z. B. sind und in denen drei Paare entsprechender Strahlen O A und O′ A, O B und O′ B, O C und O′ C sich in den drei andern Punkten schneiden. Jedes weitere Paar O D und O′ D entsprechender Strahlen wird einen neuen Punkt D der Curve geben.

Um die Tangente in einem der gegebenen Punkte, O z. B., zu construiren, hat man nur denjenigen Strahl des Büschels O zu bestimmen, der dem Strahle O′ O des Büschels O′ entspricht.

Durch fünf gegebene Punkte kann ein einziger Kegelschnitt gelegt werden; denn könnten zwei Kegelschnitte gelegt werden, so hätten sie eine endlose Zahl anderer Punkte (bestimmt durch die Paare der

An fünf gegebene Geraden (einer Ebene) kann ein berührender Kegelschnitt gelegt werden, wenn nicht mehr als zwei dieser Geraden durch denselben Punkt gehen. Denn man hat nur mit Hülfe der drei Paare entsprechender Punkte (oa und $o'a$, ob und $o'b$, oc und $o'c$), welche drei der gegebenen Geraden a, b, c auf den beiden andern o und o' bestimmen, die projectivischen Punktreihen zu construiren (Fig. 85). Die Gerade d, welche zwei andere entsprechende Punkte der beiden Reihen verbindet, wird eine neue Tangente an die Curve.

Um den Berührungspunkt einer der gegebenen Geraden, z. B. o, zu construiren, hat man nur denjenigen Punkt der Reihe o zu bestimmen, der dem Punkte oo' der Reihe o' entspricht.

Es gibt nur einen Kegelschnitt, der fünf gegebene Geraden berührt; denn sollte es zwei solcher geben, so hätten sie eine endlose Zahl gemeinsamer Tangenten (alle Verbindungslinien entsprechender Punkte

*) Steiner, loc. cit., S. 156—157, § 43.

entsprechenden Strahlen der projectivischen Büschel) gemeinsam, was unmöglich ist.

der projectivischen Punktreihen), was unmöglich ist.

Daraus folgt weiter auch:

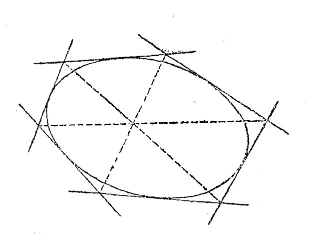
Durch vier Punkte können unendlich viele Kegelschnitte gelegt werden; irgend zwei dieser Curven haben ausser den vier gegebenen Punkten keine gemeinsamen.

Es gibt unendlich viele Kegelschnitte, welche vier gegebene Geraden berühren; irgend zwei dieser Curven haben ausser den vier gegebenen Geraden keine gemeinsame Tangente.

117. Die Lehrsätze Nr. 70 können jetzt so ausgedrückt werden:

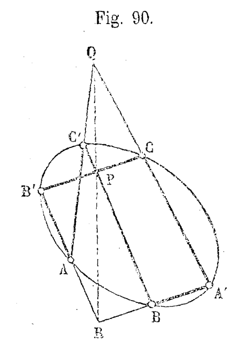
Ist ein Sechseck einem Kegelschnitt umschrieben (Fig. 89 und 56), so gehen die Verbindungslinien der drei Paare Gegenecken durch denselben Punkt *).

Fig. 89.



Ist ein Sechseck einem Kegelschnitt einbeschrieben (Fig. 90 und 57), so schneiden sich die drei Paare der Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden *[1]).

Fig. 90.



*) Satz von Brianchon, zum erstenmal 1806 veröffentlicht, später wiederholt in den „Mémoire sur les lignes du second ordre (Paris 1817, S. 34).

*[1]) Satz von Pascal: Essai sur les coniques, ein kleines Werk von 6 Seiten in 8; 1640 zum erstenmal veröffentlicht, als der Verfasser erst 16 Jahre alt war; wiederholt in der Ausgabe der „Oeuvres de Pascal (La Haye, 1779) und auch neuerdings durch H. Weissenborn in der Vorrede seines Buches: Die Projection in der Ebene (Berlin 1862).

Der Pascal'sche Satz bezieht sich auf sechs Punkte, derjenige Brianchon's auf sechs Tangenten eines Kegelschnittes; diese sechs Punkte oder Tangenten können beliebig aus allen Punkten und Tangenten der Curve ausgewählt werden. Da nun der Kegelschnitt durch fünf Punkte oder fünf Tangenten bestimmt ist, diese fünf Punkte oder fünf Tangenten also beliebig aus sämmtlichen Punkten oder Geraden einer Ebene ausgewählt werden können, der Kegelschnitt demnach bestimmt ist, sobald einmal diese fünf Elemente bestimmt sind, so drückt der Pascal'sche Satz auch die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, dass sechs Punkte einer Ebene auf einem Kegelschnitte liegen; der Satz Brianchon's drückt die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, dass sechs Geraden einer Ebene einen Kegelschnitt als Tangenten berühren.

Es folgt aus den Sätzen der Nr. 117 selbst, dass die Bedingung nothwendig ist; sechs in beliebiger Aufeinanderfolge genommene Punkte eines Kegelschnittes können als Eckpunkte eines eingeschriebenen Sechsecks angesehen werden; da aber der Pascal'sche Satz für jedes eingeschriebene Sechseck richtig ist, so müssen die drei Paare der Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden zusammenlaufen, in welcher Reihenfolge auch die sechs Punkte genommen werden, um das Sechseck zu bilden.

Die Bedingung ist hinreichend. Denn setzen wir in Fig. 90 voraus, es besitze das Sechseck $AB'CA'BC'$, dessen sechs Eckpunkte in einer gewissen Reihenfolge genommen werden, die Eigenschaft, dass die Paare der Gegenseiten BC' und $B'C$, CA' und $C'A$, AB' und $A'B$ in drei Punkten P, Q, R einer Geraden sich treffen, so geht durch die fünf Punkte $AB'CA'B$ ein Kegelschnitt (und nur einer), der die Gerade AC' in einem gewissen Punkte X schneidet. Nun wird $AB'CA'BX$ ein eingeschriebenes Sechseck sein und die Paare der Gegenseiten $B'C$ und BX, XA oder $C'A$ und CA', $A'B$ und AB' werden sich in drei Punkten einer Geraden schneiden, der zweite und der dritte sind Q und R; der erste ist also der Schnittpunkt von QR und $B'C$ oder P. Beide Ge-

raden BX und BC′ gehen darum durch P und fallen demnach zusammen. Da nun der Punkt X auf AC′ und zugleich auf BC′ liegt, so coincidirt er mit dem Punkte C′ (w. z. b. w.).

Je nach der Reihenfolge, in welcher die sechs Punkte verbunden werden, gibt es sechzig einfache Sechsecke. Aus der soeben gemachten Untersuchung folgt: wenn irgend eines dieser Sechsecke die Eigenschaft besitzt, dass sich die drei Paare Gegenseiten in drei Punkten einer geraden Linie schneiden, so gehören die sechs Punkte demselben Kegelschnitte an, folglich haben auch alle andern Sechsecke dieselbe Eigenschaft *). Betrachtungen, die den soeben angestellten correlativ sind und sich auf den Satz Brianchon's beziehen, können an einem System von sechs Geraden gemacht werden.

118. Betrachten wir die zwei Dreiecke, von denen das eine aus der ersten, dritten und fünften Seite, das andere aus der zweiten, vierten und sechsten Seite des eingeschriebenen Sechsecks AB′CA′BC′ (Fig. 90) gebildet ist. Als entsprechende Seiten nehmen wir BC′ und B′C, CA′ und C′A, AB′ und A′B. Nach dem Satze Pascal's schneiden sich diese Seiten paarweise in drei Punkten einer Geraden; also (Nr. 14) sind diese beiden Dreiecke collinear. Daraus folgt, dass man den Pascal'schen Satz auch so ausdrücken kann:

Sind zwei Dreiecke collinear, so liegen die Punkte, in welchen die Seiten des einen die nicht entsprechenden Seiten des andern schneiden, auf demselben Kegelschnitte.

Betrachten wir ebenso in einem umschriebenen Sechseck *ab′ca′bc′* (Fig. 89) die Eckpunkte ungeraden Ranges und diejenigen geraden Ranges als Eckpunkte von zwei Dreiecken, in welchen die Punkte *bc′* und *b′c*, *ca′* und *c′a*, *ab′* und *a′b* als entsprechende angenommen sind, so liegen nach dem Satze Brianchon's diese Punktenpaare auf drei nach einem Punkte gerichteten Geraden; also (Nr. 13) sind die zwei Drei-

*) Steiner, loc. cit., S. 311, § 60 . 54.

ecke collinear und es kann der Satz Brianchon's auch so ausgedrückt werden:

Sind zwei Dreiecke collinear, so berühren die Geraden, welche die Eckpunkte des einen mit den nicht entsprechenden Eckpunkten des andern verbinden, denselben Kegelschnitt.

Beide Sätze können in einen zusammengezogen werden:

Sind zwei Dreiecke collinear, so liegen die Punkte, in denen die Seiten des einen die nicht entsprechenden Seiten des andern schneiden, auf einem Kegelschnitt und die Geraden, welche die Eckpunkte des einen mit den nicht entsprechenden Eckpunkten des andern verbinden, berühren einen andern Kegelschnitt *).

119. Kommen wir auf Fig. 90 zurück und sehen die Punkte $AB'CA'B$ als fest, C' als beweglich an, so bietet sich uns der Pascal'sche Satz auch in folgender Fassung dar:

Verändert sich ein Dreieck $C'PQ$ der Art, dass sich seine Seiten PQ, PC' und QC' um die festen Punkte R, B und A drehen, während zwei seiner Eckpunkte P und Q zwei feste Gerade CB' und CA' durchlaufen, so beschreibt der dritte Eckpunkt C' einen Kegelschnitt, der durch die gegebenen Punkte A und B, durch den Schnittpunkt C der gegebenen Geraden, den Schnittpunkt B' der Geraden AR und CB' und durch den Schnittpunkt A' der Geraden BR und CA' geht *1).

---

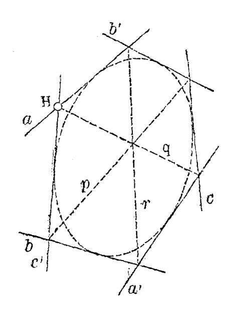
*) Möbius, loc. cit., Nr. 278.

*1) Dieser Satz wurde von Maclaurin 1721 gegeben. Siehe Transactions philosophiques de la Société royale de Londres vom Jahre 1735 (pag. 121 der franz. Uebersetzung, Bologne 1741) und Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie (Bruxelles, 1837). Ist der Punkt B in unendlicher Ferne, so wird dieser Satz Lemma 20 von Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, lib. I, S. 198, Kölner Ausgabe; die erste Ausgabe ist von 1686.

Ebenso kann man den Satz Brianchon's in folgende Fassung bringen:

Verändert sich ein Dreieck $c'pq$ (Fig. 90_1) der Art, dass seine Eckpunkte pq, pc', qc' die festen Geraden r, b und a durchlaufen, während sich zwei seiner Seiten um die festen Punkte cb' und ca' drehen, so umhüllt die dritte Seite c' einen Kegelschnitt der die gegebenen Geraden a und b, die

Fig. 90_1.



Verbindungslinie c der festen Punkte, die Verbindungslinie b' der Punkte ar und cb' und die Verbindungslinie a' der Punkte br und ca' berührt.

120. Setzen wir in den Sätzen Nr. 116 rechts voraus, es liege eine Tangente in unendlicher Ferne, so wird der Kegelschnitt eine Parabel (Nr. 19), also ist eine Parabel durch vier Tangenten bestimmt oder (Nr. 116, rechts): Es gibt nur eine Parabel, die vier gegebene Geraden berührt.

Macht man in dem Satze Nr. 113. II dieselbe Voraussetzung, so sind die unendlich fernen Punkte der beiden berührenden projectivischen Punktreihen entsprechende Punkte, denn ihre Verbindungslinie ist eine Tangente an die Curve. Daraus folgt (Nr. 74):

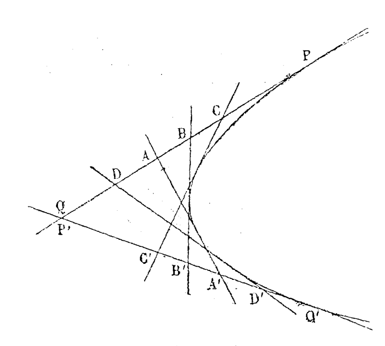
Die Tangenten an eine Parabel schneiden zwei feste Tangenten dieser Curve in Punkten, welche zwei **ähnliche** Punktreihen bilden.

Zwei feste Tangenten einer Parabel werden

durch alle anderen Tangenten in proportionale Stücke getheilt *).

Die beiden Tangenten werden von den andern in den Punkten A und A′, B und B′, C und C′ ... geschnitten (Fig. 91); P und Q′ sind die Berührungspunkte der beiden ersteren, dann wird ihr Schnittpunkt mit Q oder mit P′ be-

Fig. 91.



zeichnet, je nachdem man ihn als Punkt der einen oder andern Tangente ansieht. Wir haben also folgende gleiche Quotienten:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \cdots \frac{BC}{B'C'} = \cdots = \frac{AP}{A'P'} = \frac{AQ}{A'Q'} = \cdots = \frac{PQ}{P'Q'}.$$

Umgekehrt (Nr. 114) gibt man (in einer Ebene) zwei gerade ähnliche (nicht perspectivische) Punktreihen, so sind alle Verbindungslinien entsprechender Punkte Tangenten an dieselbe Parabel, welche die gegebenen Geraden in den ihrem Schnittpunkte entsprechenden Punkten berührt.

In diesem Falle ist nämlich die unendlich ferne Gerade eine Tangente an den Kegelschnitt, denn sie verbindet die unendlich fernen Punkte der beiden gegebenen Geraden und diese Punkte sind entsprechende (Nr. 73).

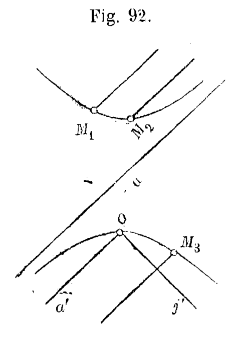
121. Setzen wir in dem Satze Nr. 114, Fig. 87 voraus,

*) Apollonii Pergaei Conicorum lib. III, 41.

der Punkt A sei in unendlicher Ferne, oder, was auf dasselbe herauskommt, der erste Büschel bestehe aus parallelen Geraden, so entspricht der Geraden OA (d. h. demjenigen Strahl des zweiten Büschels, der den Strahlen des ersten parallel läuft) als Strahl a' des zweiten Büschels angesehen die Gerade a des ersten Büschels und diese ist die Tangente in A; diese Gerade kann in endlicher oder unendlicher Ferne liegen.

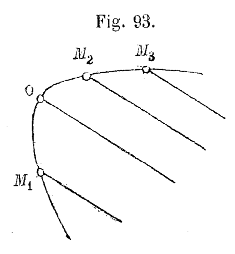
Im ersten Fall (Fig. 92) ist die unendlich ferne Gerade ein Strahl j des ersten Büschels, welchem im zweiten Büschel

Fig. 92.



ein von a' verschiedener und folglich nicht durch A gehender Strahl j' entspricht; der Kegelschnitt wird also eine Hyperbel sein (Nr. 19), deren unendlich ferne Punkte $A \equiv aa'$ und jj'

Fig. 93.

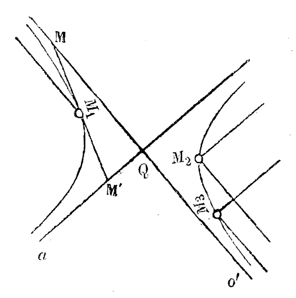


sind; die Gerade a ist eine Asymptote und j' ist der anderen parallel.

Im zweiten Fall (Fig. 93) ist die unendlich ferne Gerade in A eine Tangente an den Kegelschnitt; dieser ist also eine Parabel.

122. Setzt man in demselben Satze Nr. 114 voraus, es liegen beide Punkte A und O in unendlicher Ferne (Fig. 94), so bestehen beide projectivischen Büschel aus parallelen Strahlen und da der von ihnen erzeugte Kegelschnitt durch die Punkte A und O gehen muss, so ist er eine Hyperbel (Nr. 19). Die Asymptoten der Hyperbel sind die Tangenten in ihren unendlich fernen Punkten *); sie sind also

Fig. 94.



diejenigen Strahlen a und o' des ersten und zweiten Büschels, welche der unendlich fernen Geraden, nach einander als Strahl des zweiten oder des ersten Büschels angesehen, entsprechen.

Nach dem allgemeinen Satz Nr. 113 werden die Asymptoten der Hyperbel von allen anderen Tangenten in Punkten von zwei projectivischen Punktreihen geschnitten, in welchen die Berührungspunkte, die unendlich ferne liegen, dem Schnittpunkte Q der Asymptoten entsprechen. In diesem Falle geht die Gleichung

$$J M . I' M' = \text{const.}$$

der Nr. 59 und 83 in folgende über:

$$Q M . Q M' = \text{const.},$$

wo M und M' die Schnittpunkte einer beliebigen Tangente mit den Asymptoten sind.

Wir schliessen hieraus:

---

*) Desargues, loc. cit., S. 210. — Newton, loc. cit., Anmerkung z. Satze S. 27.

Das Product der durch eine beliebige Tangente an die Hyperbel auf beiden Asymptoten abgeschnittenen Segmente, wenn diese vom Schnittpunkt der Asymptoten aus gemessen werden, hat einen constanten Werth.

Man kann auch sagen:

Der Inhalt des von einer beliebigen Tangente an die Hyperbel und ihren Asymptoten gebildeten Dreiecks ist constant *).

123. Wenden wir den Satz Nr. 113 auf den Fall an, wo zwei feste, parallele Tangenten von einer veränderlichen Tangente in M und M′ geschnitten werden. In den durch diese Punkte erzeugten projectivischen Punktreihen entsprechen dem unendlich fernen Schnittpunkt der beiden festen Tangenten ihre Berührungspunkte; bezeichnet man sie mit J und I′, so hat man in Folge von Nr. 59 die Gleichung

$$JM . I'M' = \text{const.}$$

oder:

Das Product der Segmente, welche eine veränderliche Tangente auf zwei festen parallelen Tangenten (von ihren Berührungspunkten aus gemessen) abschneidet, ist constant *¹).

§ 15. Constructionen und Uebungen.

124. Folgende Aufgaben werden mit Hülfe der zu Nr. 117 correlativen Sätze gelöst:

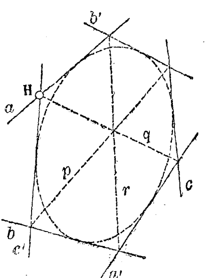
Fünf Tangenten a, b', c, a', b eines Kegelschnittes sind gegeben; man soll durch einen Punkt H einer dieser Tangenten a eine sechste Tangente an die Curve legen (Fig. 95).	Fünf Punkte A, B′, C, A′, B eines Kegelschnittes sind gegeben; man soll den Schnittpunkt dieser Curve mit einer Geraden suchen, die durch einen der gegebenen Punkte A geht (Fig. 96).

*) Apollonius, loc. cit., III, 43.

*¹) Apollonius, loc. cit., III, 42.

Ist c' die gesuchte Tangente, so hat das Sechseck $a\,b'\,c\,a'\,b\,c'$ die in dem Satze Brianchon's ausgedrückte Eigenschaft. Ziehen wir die Diagonale r, welche zwei Gegenecken $a\,b'$ und $a'\,b$ verbindet und die Diagonale q, welche die Gegenecken $c\,a'$ und $c'\,a$ (wo $c'\,a$ der gegebene Punkt H ist), so muss die Diagonale, welche die beiden andern Gegenecken $b\,c'$ und $b'\,c$ verbindet, durch den Punkt $q\,r$ gehen. Verbindet also p die Punkte $q\,r$ und

Fig. 95.

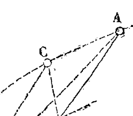
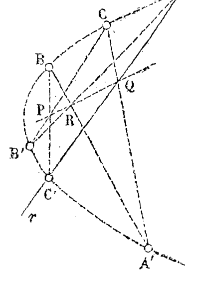


$b'\,c$, so ist die Verbindungslinie von $p\,b$ und dem gegebenen Punkt H die gesuchte Gerade.

Setzt man jetzt voraus, der Punkt H nehme auf irgend einer der gegebenen Tangenten andere Lagen an und wiederholt man jedesmal obige Construction, so erhält man eine beliebige Anzahl von Tangenten an den Kegelschnitt. Der Satz Brianchon's dient also dazu, mit Hülfe von Tangenten den Kegelschnitt zu

Ist C′ der gesuchte Punkt, so hat das Sechseck A B′ C A′ B C′ die in dem Satze Pascal's ausgedrückte Eigenschaft. Der Schnittpunkt von zwei Gegenseiten des Sechsecks A B′ und A′ B sei R; der Schnittpunkt von zwei andern Gegenseiten C A′ und r sei Q; dann muss Q R die beiden andern Gegenseiten B′ C und B C′ in demselben Punkte P schneiden. Verbindet man also den Schnittpunkt P der Geraden B′ C und

Fig. 96.

Q R mit B, so schneidet B P die Gerade r in dem gesuchten Punkte C′.

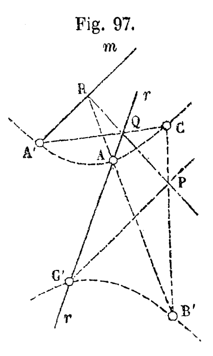
Setzt man jetzt voraus, die gegebene Gerade nehme noch andere Lagen an, indem sie sich um einen der gegebenen Punkte des Kegelschnittes dreht und wiederholt man jedesmal obige Construction, so erhält man eine beliebige Anzahl von Punkten des Kegelschnittes. Der Satz Pascal's dient also dazu, punkt-

construiren, der durch fünf gegebene Tangenten bestimmt ist*). | weise den Kegelschnitt zu construiren, der durch fünf gegebene Punkte bestimmt ist*¹).

125. Setzen wir voraus, dass in der vorhergehenden Aufgabe rechts der Punkt B in unendlicher Ferne liege. Der Kegelschnitt wird dann im Allgemeinen eine Hyperbel sein, von welcher die Punkte A, B′, C, A′ und die Richtung (m) einer Asymptote bekannt sind. Man sucht den zweiten Schnittpunkt C′ der Curve mit einer durch A gehenden, gegebenen Geraden r (Fig. 97).

Die Auflösung wird von derjenigen der vorigen Aufgabe abgeleitet, indem man den Punkt B in der gegebenen Richtung in

Fig. 97.



unendliche Ferne rückt. Man verbindet den Schnittpunkt R von A B′ und der durch A′ in der gegebenen Richtung gezogenen Geraden mit dem Schnittpunkte Q von r und A′ C, zieht hierauf durch den Schnittpunkt P von Q R und B′ C eine Parallele zu A′ R, welche r in dem gesuchten Punkte C′ schneidet.

I. Wenn dagegen der Punkt A unendlich ferne liegt, so geht die Aufgabe in die folgende über:

Von einer Hyperbel sind vier Punkte B′ C A′ B und die Richtung einer Asymptote gegeben; man sucht den Schnittpunkt dieser Curve mit einer gegebenen Geraden r, die der Asymptote parallel ist (Fig. 98).

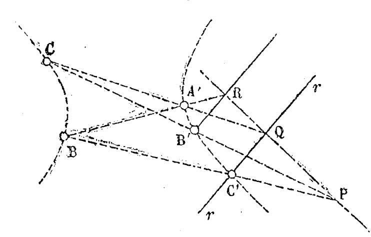
Auflösung. Wir verbinden den Schnittpunkt R von A′ B und der durch B′ in der gegebenen Richtung gezogenen Geraden

*) Brianchon, loc. cit., S. 38. — Poncelet, loc. cit., Nr. 209.

*¹) Newton, loc. cit., Satz XXII. — Maclaurin, De linearum geometricarum proprietatibus generalibus (London, 1748), § 44.

mit dem Schnittpunkt Q von A′ C und der gegebenen Geraden r; jetzt ziehen wir durch B und den Schnittpunkt P von Q R

Fig. 98.



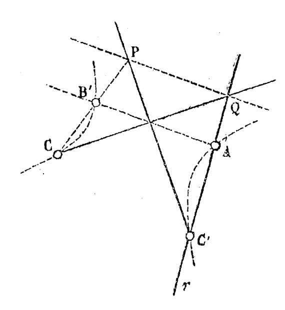
und B′ C eine Gerade; B P schneidet die Gerade r in dem gesuchten Hyperbelpunkte C′.

II. Sind zwei Punkte A′ und B unendlich ferne, so haben wir folgende Aufgabe:

Von einer Hyperbel sind drei Punkte A, B′, C und die Richtungen beider Asymptoten gegeben; man sucht den zweiten Schnittpunkt der Curve und einer durch A gehenden gegebenen Geraden r (Fig. 99).

Auflösung. Durch den Schnittpunkt Q von der gegebenen Geraden r und der durch C in der Richtung der ersten Asym-

Fig. 99.



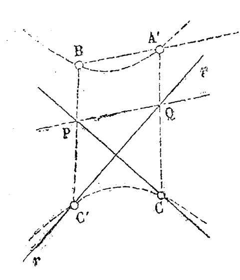
ptote gezogenen Geraden ziehen wir eine Parallele zu A B′: sie schneidet B′ C in P; durch P ziehen wir die Parallele zu der zweiten Asymptote, sie schneidet r in dem gesuchten Punkte C′ der Hyperbel.

III. Sind die Punkte A und B′ unendlich ferne, so ist die durch die vorhergehende Construction gelöste Aufgabe gleich der folgenden:

Von einer Hyperbel sind drei Punkte C, A′, B und die Richtungen der Asymptoten gegeben; man sucht den Schnittpunkt der Curve mit einer gegebenen Geraden *r*, welche der ersten Asymptote parallel ist (Fig. 100).

Auflösung. Wir ziehen durch den Schnittpunkt Q von *r* und C A′ eine Parallele zu A′ B; diese schneidet in P die durch

Fig. 100.



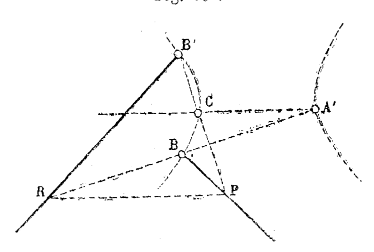
C zur zweiten Asymptote parallel gezogene Gerade; dann schneidet B P die gegebene Gerade in dem gesuchten Punkte C′ der Hyperbel.

IV. Sind endlich die Punkte B′, C, A′, B in endlicher Entfernung, die Gerade A C′ unendlich ferne, so haben wir folgende Aufgabe:

Vier Punkte B′, C, A′, B einer Hyperbel und die Richtung einer Asymptote sind gegeben; man sucht die Richtung der zweiten Asymptote (Fig. 101).

Auflösung. Durch den Schnittpunkt R von A′ B und der durch B′ in der gegebenen Richtung gezogenen Geraden ziehen

Fig. 101.



wir die Parallele zu C A′; sie schneidet die Gerade B′ C in P; dann ist B P die gesuchte Richtung.

Alle diese Aufgaben sind nur besondere Fälle von Nr. 124 rechts; es wird für den Studirenden eine nützliche Uebung sein, die Constructionen für die besonderen Fälle von der allgemeinen Construction abzuleiten; man hat zu dem Zwecke nur Folgendes zu überlegen: Soll ein Punkt in endlicher Entfernung mit einem unendlich fernen Punkte in einer gegebenen Richtung verbunden werden, so hat man durch den ersten Punkt eine Parallele zu der gegebenen Richtung zu ziehen.

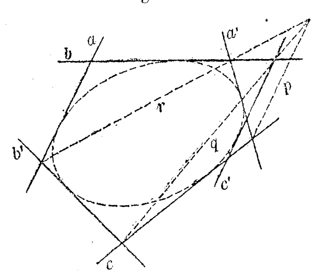
126. Betrachten wir ebenso die besonderen Fälle der Aufgabe Nr. 124 links, indem wir voraussetzen, es rücke eines der gegebenen Elemente in unendliche Ferne.

Nehmen wir in erster Linie an, der Punkt ac' sei unendlich ferne, so haben wir folgende Aufgabe zu lösen:

Fünf Tangenten a, b', c, a', b eines Kegelschnittes sind gegeben; man soll eine sechste Tangente construiren, die einer der gegebenen, z. B. a, parallel ist (Fig. 102).

Auflösung. Zeichnen wir die Gerade r, welche die Punkte ab' und $a'b$ verbindet, ferner durch den Punkt $a'c$ eine Gerade

Fig. 102.



q parallel zu a und eine Gerade p, welche die Punkte qr und $b'c$ verbindet. Die gesuchte Tangente c' geht durch den Punkt pb.

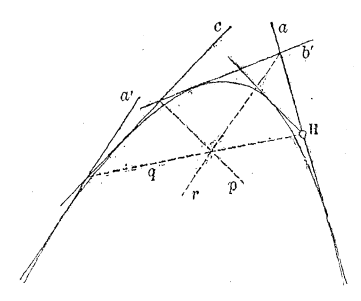
Aus einem beliebigen Punkte der Ebene eines Kegelschnittes kann man höchstens zwei Tangenten an denselben legen (Nr. 19); aus einem gegebenen Punkte einer Tangente kann man nur noch eine andere Tangente ziehen. Ist also der Kegelschnitt eine Parabel, so können nie zwei ihrer Tangenten parallel sein.

I. Ist die Gerade b unendlich ferne, so haben wir die Aufgabe:

Vier Tangenten a, b', c, a' einer Parabel sind gegeben; man soll durch einen Punkt H von a eine fünfte Tangente construiren (Fig. 103).

Auflösung. Wir ziehen die Gerade r durch $a\,b'$ und parallel zu a', ferner die Gerade q, welche den gegebenen Punkt H

Fig. 103.



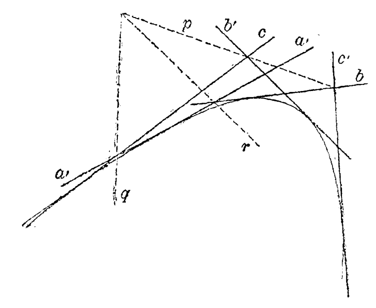
mit dem Punkte $a'\,c$ verbindet und die Gerade p, welche die Punkte $q\,r$ und $b'\,c$ verbindet. Die gesuchte Tangente ist parallel zu p.

II. Ist die Gerade a unendlich ferne, so haben wir die Aufgabe:

Vier Tangenten b', c, a', b einer Parabel sind gegeben; man soll eine Tangente construiren, die einer gegebenen Geraden parallel ist (Fig. 104).

Auflösung. Wir ziehen durch den Punkt $a'\,b$ eine Gerade r parallel zu b', ferner durch den Punkt $a'\,c$ die Gerade q in der

Fig. 104.



gegebenen Richtung, endlich die Gerade p, welche die Punkte $b'\,c$ und $q\,r$ verbindet. Die gesuchte Tangente geht durch den Punkt $p\,b$.

III. Verändert in der Aufgabe I der Punkt H seine Lage auf a, oder verändert sich die gegebene Richtung in der Aufgabe II, so gelangt man zu der Lösung der Aufgabe:

An eine durch vier gegebene Tangenten bestimmte Parabel noch weitere Tangenten zu ziehen.

§ 16. Folgerungen aus den Sätzen von Pascal und Brianchon.

127. Wir haben schon einige Sätze und Constructionen (Nr. 124 und folgende) entwickelt, welche unmittelbare Folgerungen aus den Lehrsätzen von Pascal und Brianchon sind und welche sich aus der Voraussetzung ergeben, dass einzelne Elemente ins Unendliche rücken. Man erhält noch andere Zusätze, indem man annimmt, dass von den sechs Punkten oder sechs Tangenten zwei unendlich nahe zusammen rücken *).

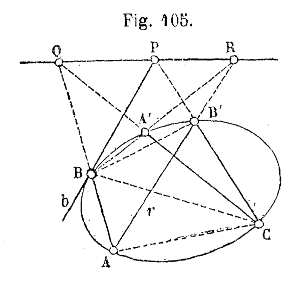
Sind $AB'CA'BC'$ sechs Punkte eines Kegelschnittes, so sagt der Pascal'sche Satz, dass z. B. die beiden Büschel A $(A'B'CC')$ und B $(A'B'CC')$ projectivisch sind. Dem Strahl AB des ersten entspricht die Tangente in B, so dass man sagen kann, die Gruppe der vier Geraden

$$AA',\ AB',\ AC,\ AB$$

ist projectivisch zu der Gruppe von

$$BA',\ BB',\ BC,\ \text{Tangente in } B;$$

Fig. 105.



damit ist offenbar vorausgesetzt, dass der Punkt C', der zuerst in einer beliebigen Lage auf der Curve angenommen

*) Carnot, loc. cit., S. 455—456.

wurde, dem Punkte B unendlich nahe gekommen sei. Statt des eingeschriebenen Sechsecks hat man die aus dem eingeschriebenen Fünfeck AB′CA′B und der Tangente *b* im Eckpunkt B zusammengesetzte Figur (Fig. 105) und der Pascal'sche Satz geht in den folgenden über:

Ist ein Fünfeck (AB′CA′B) einem Kegelschnitt eingeschrieben, so liegen die zwei Schnittpunkte R, Q von zwei Paaren nicht aufeinander folgender Seiten (AB′ und A′B, AB und CA′) und der Schnittpunkt P der fünften Seite (B′C) und der Tangente im gegenüberliegenden Eckpunkt (B) auf derselben Geraden.

Wir können diesen Satz auch aus der Construction (Nr. 66 rechts) zweier projectivischer Büschel ableiten. Drei Paare entsprechender Strahlen AA′ und BA′, AC und BC, AB′ und BB′ sind gegeben; wir schneiden die beiden Büschel durch die Transversalen CA′ und CB′; R sei der Schnittpunkt von A′B und AB′; dann müssen irgend zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel A und B die Transversalen CA′ und CB′ beziehungsweise in zwei Punkten schneiden, welche mit R in derselben Geraden liegen. Um also denjenigen Strahl des zweiten Büschels, der AB entspricht, d. h. die Tangente in B zu erhalten, hat man nur den Punkt R mit dem Schnittpunkt Q von CA′ und AB zu verbinden: die verlangte Gerade *b* geht dann von dem Punkte B nach dem Schnittpunkte P von CB′ und QR. Diese Construction stimmt genau mit der oben ausgesprochenen Folgerung überein.

128. Diese Folgerung dient dazu, die beiden folgenden Aufgaben zu lösen:

1. Fünf Punkte A, B′, C, A′, B eines Kegelschnittes sind gegeben; man soll die Tangente in einem der gegebenen Punkte B construiren (Fig. 105).

Auflösung. Wir verbinden den Schnittpunkt Q von AB und CA′ mit dem Schnittpunkt R von AB′ und A′B; P sei der Durchschnitt von QR und B′C. Die gesuchte Tangente ist BP *).

Besondere Fälle. Einer der Punkte AB′CA′ ist unendlich ferne: Vier Punkte einer Hyperbel und die Richtung einer

*) Maclaurin, loc. cit., § 40.

Asymptote sind bekannt; man soll die Tangente in einem der gegebenen Punkte construiren.

B ist unendlich fern: Vier Punkte einer Hyperbel und die Richtung einer Asymptote sind bekannt; die Asymptote selbst zu zeichnen.

Von den vier Punkten A B′ C A′ sind zwei unendlich fern: Drei Punkte einer Hyperbel und die Richtungen der Asymptoten sind gegeben; in einem der gegebenen Punkte die Tangente zu zeichnen.

B und einer der anderen Punkte sind unendlich fern: Drei Punkte einer Hyperbel und die Richtungen der Asymptoten sind bekannt; eine Asymptote selbst zu zeichnen.

2. Vier Punkte A B A′ C eines Kegelschnittes und die Tangente in B sind gegeben; den Kegelschnitt selbst punktweise zu zeichnen; z. B. den Punkt der Curve zu finden, der sich auf einer durch A gehenden Geraden r befindet (Fig. 105).

Auflösung. Der Schnittpunkt von r und A′B sei R; der Schnittpunkt von A B und C A′ sei Q; der Durchschnitt von Q R und der gegebenen Tangente sei P; dann ist der Schnittpunkt B′ von C P und der gegebenen Geraden r der gesuchte Punkt der Curve.

Setzt man voraus, es liegen ein oder zwei der Punkte A A′ C oder der Punkt A und die Gerade r, oder der Punkt B, oder der Punkt B und einer der anderen Punkte, oder der Punkt B und die gegebene Tangente in unendlicher Ferne, so hat man folgende besondere Fälle:

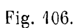
Die Hyperbel punktweise zu verzeichnen, wenn von ihr bekannt sind: drei Punkte, die Tangente in einem derselben und die Richtung einer Asymptote; oder zwei Punkte, die Tangente in einem derselben und die Richtungen der Asymptoten; oder drei Punkte und eine Asymptote; oder zwei Punkte, eine Asymptote und die Richtung der andern.

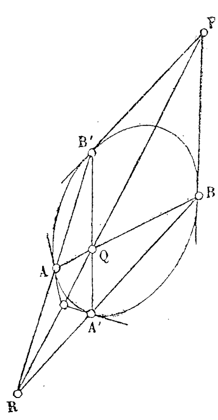
Die Parabel punktweise zu verzeichnen, wenn von ihr drei Punkte in endlicher Entfernung und die Richtung der Geraden gegeben sind, die sich in dem unendlich fernen Punkte schneiden.

129. Kommen wir jetzt auf das Sechseck A B′ C A′ B C′ im Kegelschnitt zurück und nehmen an, dass nicht nur C′ dem Punkte B unendlich nahe liege, sondern dass auch B′

dem Punkte C unendlich nahe rücke, so geht die Figur in das eingeschriebene Viereck A B′ A′ B mit den Tangenten in den Eckpunkten B und B′ über (Fig. 106) und der Pascal'sche Satz heisst dann:

In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Viereck liegen die zwei Schnittpunkte der Gegen-


Fig. 106.



seiten mit demjenigen der Tangenten in irgend zwei gegenüberliegenden Eckpunkten in einer Geraden.

Diese Eigenschaft fällt mit einer anderswo (Nr. 67 rechts) erhaltenen zusammen. Betrachten wir nämlich die projectivischen Büschel, deren entsprechende Strahlen B A und B′ A, B A′ und B′ A′, . . . sind, so muss die Gerade, welche den Schnittpunkt Q von B A und B′ A′ mit dem Schnittpunkt R von B′ A und B A′ verbindet, durch den Schnittpunkt P derjenigen Strahlen gehen, welche der Verbindungslinie der Mittelpunkte B und B′ entsprechen.

130. Mit Hülfe des vorangehenden Zusatzes werden folgende Aufgaben gelöst:

1. Vier Punkte A B′ A′ B eines Kegelschnittes und die Tangente B P in B sind gegeben; man soll die Tangente in B′ construiren (Fig. 106).

Auflösung. Der Schnittpunkt von A B und A′ B′ sei Q, derjenige von A B′ und A′ B sei R und derjenige von Q R und

der gegebenen Tangente sei P; dann ist B′ P die gesuchte Tangente *).

Nimmt man an, es liege einer der gegebenen Punkte oder die gegebene Gerade unendlich ferne, so erhält man die Auflösung folgender besonderer Aufgaben:

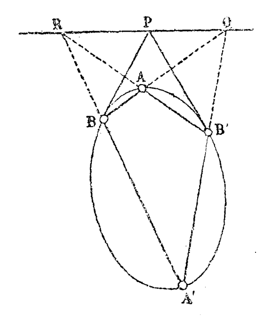
In einem gegebenen Punkte einer Hyperbel die Tangente zu zeichnen, wenn von der Curve ausserdem gegeben sind: zwei andere Punkte, die Tangente in einem derselben und die Richtung einer Asymptote; oder ein anderer Punkt mit einer Tangente und den Richtungen beider Asymptoten; oder zwei andere Punkte und eine Asymptote; oder ein anderer Punkt, eine Asymptote und die Richtung der zweiten Asymptote.

Die Asymptote einer Hyperbel zu zeichnen, wenn die Richtung derselben gegeben ist und ausserdem noch drei Punkte der Curve und die Tangente in einem derselben; oder zwei Punkte, die Tangente in einem derselben und die Richtung der zweiten Asymptote; oder zwei Punkte und die zweite Asymptote selbst.

In einem gegebenen Punkte der Parabel eine Tangente zu zeichnen, wenn von dieser Curve noch zwei weitere Punkte in endlicher Entfernung und die Richtung gegeben sind, in welcher der unendlich ferne Punkt liegt.

2. Punktweise den Kegelschnitt zu construiren, von welchem drei Punkte A, B, B′ und die Tangenten B P und B′ P gegeben

Fig. 107.



sind, indem man z. B. den Punkt A′ sucht, in welchem eine beliebige durch B gezogene Gerade r von der Curve geschnitten wird (Fig. 107).

---

*) Maclaurin, loc. cit., § 38.

Auflösung. Wir verbinden den Schnittpunkt P der gegebenen Tangenten mit dem Schnittpunkt R von r und A B′; ist Q der Durchschnitt von A B und P R, so schneidet B′ Q die Gerade r in dem gesuchten Punkte A′.

Nimmt man an, es liege einer der Punkte A, B oder B′ oder eine der Geraden B P, B′ P oder r in unendlicher Ferne, so hat man die Auflösungen folgender besonderer Fälle:

Punktweise die Hyperbel zu zeichnen, von welcher gegeben sind: zwei Punkte mit ihren Tangenten und die Richtung einer Asymptote, oder ein Punkt mit seiner Tangente, eine Asymptote und die Richtung der zweiten Asymptote, oder beide Asymptoten und ein Punkt.

Punktweise die Parabel zu construiren, von welcher zwei Punkte, die Tangente in einem derselben und die Richtung der Geraden gegeben sind, die in dem unendlich fernen Punkte zusammentreffen.

131. Die Tangenten in den beiden anderen Eckpunkten A und A′ des Vierecks A B A′ B′ (Fig. 107) schneiden sich ebenfalls auf der Verbindungslinie der Punkte (A B, A′ B′) und (A B′, A′ B), oder:

Ist ein Viereck einem Kegelschnitt eingeschrieben, so liegen die zwei Schnittpunkte der Gegenseiten und die zwei Schnittpunkte der Tangenten in den Gegenecken auf derselben Geraden.

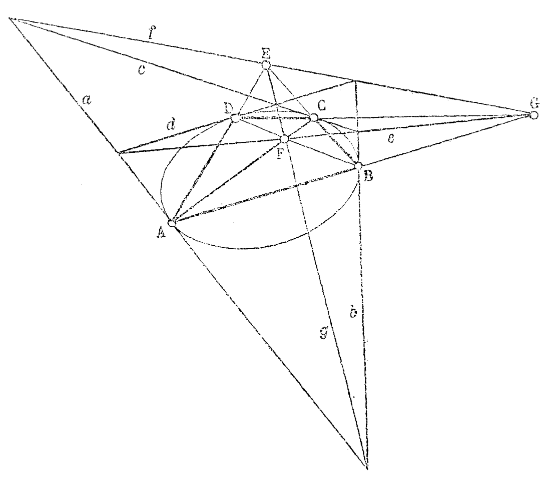
132. Schreiben wir jetzt die Buchstaben C, D, E und G an der Stelle von A′, B′, R und Q (Fig. 108). In dem eingeschriebenen Viereck A B C D liegen also der Schnittpunkt der Tangenten in A und C, der Schnittpunkt der Tangenten in B und D, der Schnittpunkt der Seiten A D und B C und der Schnittpunkt der Seiten A B und C D auf derselben Geraden E G.

Nimmt man dieselben Punkte A, B, C und D in einer anderen Reihenfolge, so hat man zwei andere eingeschriebene Vierecke A C D B und A C B D.

Wendet man also den letzten Lehrsatz auf das eingeschriebene Viereck A C D B an, so findet man, dass der Schnitt-

punkt der Tangenten in A und D, der Schnittpunkt der Tangenten in C und B, der Schnittpunkt der Seiten AB und CD und der Schnittpunkt der Seiten AC und BD auf derselben Geraden FG liegen. Ebenso gibt das eingeschriebene Viereck

Fig. 108.



ACBD vier Punkte auf derselben Geraden EF, nämlich die Schnittpunkte der Tangenten in A und B, der Tangenten in C und D, der Seiten AD und CB und der Seiten AC und BD *).

Die drei Geraden EG, FG, EF, die man so erhält, sind die Seiten des Diagonaldreiecks (Nr. 30, 2) desjenigen vollständigen Vierecks, dessen Eckpunkte die vier gegebenen Punkte sind; und da dieselben Geraden auch die Durchschnitte der Tangentenpaare in diesen Punkten enthalten, so sind sie also auch die Diagonalen des von diesen vier Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits oder:

Das von vier Tangenten eines Kegelschnittes gebildete vollständige Vierseit und das von ihren vier Berührungspunkten gebildete vollständige Viereck haben dasselbe Diagonaldreieck.

---

*) Maclaurin, loc. cit., § 50. — Carnot, loc. cit., S. 453—454.

In Fig. 108 sind a, b, c, d die vier Tangenten, A, B, C, D die vier Berührungspunkte; EFG ist das Diagonaldreieck.

133. In dem vollständigen Vierseite $abcd$ schneidet die Diagonale f, deren Endpunkte ac und bd sind, die beiden andern Diagonalen e und g in E und G; diese vier Punkte sind also harmonisch (49). Der correlative Satz heisst: Diejenigen zwei Gegenseiten des eingeschriebenen vollständigen Vierecks ABCD, welche sich in F schneiden, sind durch die Geraden, die nach den zwei andern Diagonalpunkten E und G gehen, harmonisch getrennt (Nr. 50). Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen (Fig. 108):

Hat ein (einfaches) eingeschriebenes Viereck (ABCD) als aufeinanderfolgende Eckpunkte die aufeinanderfolgenden Berührungspunkte eines (einfachen) umschriebenen Vierecks ($abcd$), so gehen 1. die Diagonalen der beiden Vierecke durch denselben Punkt (F) und bilden eine harmonische Gruppe; 2. liegen die Schnittpunkte der Paare der Gegenseiten in beiden Vierecken in einer geraden Linie (EG) und sind harmonisch getrennt; 3. gehen die Diagonalen des umschriebenen Vierecks durch die Schnittpunkte der Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks *).

134. Mit Hülfe des Lehrsatzes von Nr. 132 kann man zu vier gegebenen Tangenten $a\,b\,c\,d$ eines Kegelschnittes und einem ihrer Berührungspunkte unmittelbar die drei anderen finden, oder zu vier gegebenen Punkten A, B, C, D und der Tangente in einem derselben, die Tangenten in den drei anderen Punkten construiren *[1]).

Auflösung. Wir zeichnen das Diagonaldreieck EFG des vollständigen Vierseites $a\,b\,c\,d$; dann schneiden AG, AF und	Wir zeichnen das Diagonaldreiseit $e\,f\,g$ des vollständigen Vierecks ABCD; die Punkte $a\,g$, $a\,f$ und $a\,e$ gehören bezie-

*) Chasles, Sect. coniques, Nr. 121.

*[1]) Maclaurin, loc. cit., § 38 und 39.

A E beziehungsweise b, c und d in B, C und D.

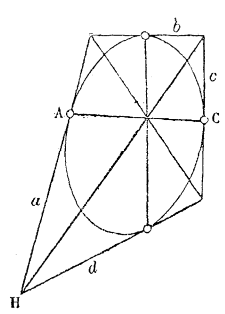
hungsweise den verlangten Tangenten b, c und d an.

135. Betrachten wir die vier Geraden $abcd$ als Seiten eines (einfachen) dem Kegelschnitt umschriebenen Vierseits, so können wir dem Lehrsatz von Nr. 132 noch folgenden Ausdruck geben, der schon in demjenigen von Nr. 133 enthalten ist *):

Wird ein Vierseit einem Kegelschnitt umschrieben, so gehen die Verbindungslinien der Berührungspunkte der Gegenseiten durch den Schnittpunkt der Diagonalen (Fig. 109).

Diese Eigenschaft fällt mit einer schon bei den projectivischen Punktreihen bewiesenen (Nr. 67 links) zusammen. Denn

Fig. 109.



betrachten wir die projectivischen Punktreihen a und c, in welchen ab und cb, ad und cd,... entsprechende Punkte sind, so müssen sich die Geraden, welche die Punkte ab und cd und die Punkte cb und ad verbinden, auf derjenigen Geraden schneiden, welche die dem Punkte ac entsprechenden Punkte verbindet; das ist aber die Verbindungslinie der Berührungspunkte von a und c.

Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel und betrachtet man das von den Asymptoten und zwei beliebigen Tangenten gebildete Vierseit, so sagt der obige Lehrsatz aus, dass die Diagonalen derjenigen Sehne parallel sind, welche die Berührungspunkte der beiden Tangenten verbindet *1).

---

*) Newton, loc. cit. Zus. II. zu Lemma XXIV.

*1) Apollonius, loc. cit., III, 44.

136. Der vorangehende Satz dient dazu, folgende Aufgabe zu lösen:

Drei Tangenten a, b, c und zwei ihrer Berührungspunkte A und C sind gegeben; man soll den Kegelschnitt selbst mit Hülfe weiterer Tangenten construiren; man soll z. B. durch einen Punkt H, der auf a gegeben ist, eine neue Tangente ziehen (Fig. 109).

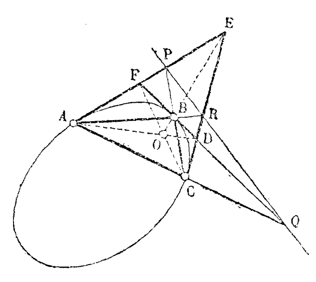
Auflösung. Wir verbinden den Punkt $a\,b$ mit dem Schnittpunkt von A C und H $(b\,c)$; diese Verbindungslinie trifft c in einem Punkte, der mit H verbunden, die verlangte Tangente d liefert.

Setzt man voraus, es liege einer der Punkte A und C oder eine der gegebenen Tangenten in unendlicher Ferne, so erhält man die Auflösungen von folgenden besonderen Fällen:

Vermittelst Tangenten die Hyperbel zu construiren, von welcher eine Asymptote, zwei Tangenten und ein Berührungspunkt — oder beide Asymptoten und eine Tangente gegeben sind; vermittelst Tangenten die Parabel zu construiren, von welcher der unendlich ferne Punkt, zwei Tangenten und ein Berührungspunkt — oder zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte bekannt sind.

137. Nehmen wir in dem Pascal'schen Satze an, dass die Punkte A und B′, C und A′, B und C′ einander unendlich nahe

Fig. 110.



rücken, so bekommen wir (Fig. 110) das eingeschriebene Dreieck A B C, die Tangenten in den Eckpunkten und den Satz:

Ist ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben, so liegen die drei Punkte, in welchen die Seiten beziehungsweise von den Tangenten der gegenüberliegenden Eckpunkte geschnitten werden, auf derselben Geraden (P R Q).

138. Mit diesem Satze wird die Aufgabe gelöst:

Drei Punkte A, B, C eines Kegelschnittes und die Tangenten in A und B sind gegeben; man soll die Tangente in C construiren (Fig. 110).

Auflösung. Die gegebenen Tangenten schneiden beziehungsweise BC und CA in P und Q; PQ schneidet AB in R; dann ist CR die gesuchte Tangente.

Folgende Aufgaben sind besondere Fälle von der vorhergehenden:

Zwei Punkte A und B einer Hyperbel, die Tangenten in diesen Punkten und die Richtung einer Asymptote sind gegeben; man soll diese Asymptote selbst construiren.

Eine Asymptote einer Hyperbel, ein Punkt A und seine Tangente und die Richtung der zweiten Asymptote sind gegeben; man soll letztere Gerade selbst construiren.

Beide Asymptoten einer Hyperbel und ein Punkt C sind gegeben; man soll die Tangente in C construiren.

139. Das eingeschriebene Dreieck ABC und das von den Tangenten gebildete Dreieck DEF (Fig. 110) besitzen die Eigenschaft, dass sich die Seitenpaare BC und EF, CA und FD, AB und DE in drei Punkten einer Geraden schneiden; folglich sind die beiden Dreiecke collinear, d. h. (Nr. 15) die Verbindungslinien AD, BE und CF ihrer Eckpunkte gehen durch denselben Punkt O, oder:

Ist ein Dreieck einem Kegelschnitt umschrieben, so gehen die Geraden, welche seine Eckpunkte mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbinden, durch denselben Punkt.

140. Mit Hülfe dieses Satzes wird die Aufgabe gelöst:

Drei Tangenten eines Kegelschnittes und zwei Berührungspunkte sind gegeben; man soll den dritten bestimmen.

Auflösung. In Fig. 110 sei DEF das von den gegebenen Tangenten gebildete umschriebene Dreieck, A und B die Berührungspunkte von EF und FD. Die Geraden AD und BE schneiden sich in O; dann schneidet FO die Tangente DE in dem gesuchten Punkte C.



Besondere Fälle. Zwei Tangenten, eine Asymptote einer Hyperbel und der Berührungspunkt der einen Tangente sind gegeben; man sucht den Berührungspunkt der andern Tangente. Beide Asymptoten und eine Tangente einer Hyperbel sind gegeben; man sucht ihren Berührungspunkt.

Zwei Tangenten einer Parabel mit ihren Berührungspunkten sind gegeben; man sucht die Richtung der Geraden, die sich in dem unendlich fernen Punkte schneiden.

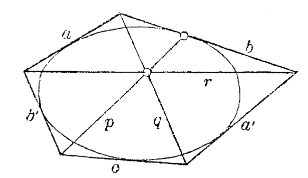
Zwei Tangenten einer Parabel, der Berührungspunkt der einen und der unendlich ferne Punkt sind gegeben; man sucht den Berührungspunkt der andern Tangente.

141. Ebenso wie aus dem Pascal'schen Satze eine Reihe specieller, das eingeschriebene Fünfeck, Viereck und Dreieck betreffender Sätze abgeleitet wurde, kann man auch aus dem Satze des Brianchon correlative, das umschriebene Fünfeck, Viereck und Dreieck betreffende Sätze ableiten.

Nimmt man nämlich an, dass von den sechs Tangenten a, b', c, a', b, c', welche das umschriebene Sechseck (Nr. 117, links) bilden, zwei, z. B. b und c', unendlich nahe zusammenrücken, so wird, da eine Tangente die unendlich nahe liegende Tangente in ihrem Berührungspunkte schneidet (Nr. 110, 113), das Sechseck in diejenige Figur übergehen, welche aus dem umschriebenen Fünfeck $a\,b'\,c\,a'\,b$ und dem Berührungspunkt der Seite b zusammengesetzt ist (Fig. 111). Der Satz des Brianchon heisst dann:

Ist ein Fünfeck einem Kegelschnitt umschrieben, so schneiden sich zwei Diagonalen, welche

Fig. 111.



zwei Paare verschiedener Eckpunkte verbinden und die Verbindungslinie des fünften Eckpunktes

mit dem Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seite in demselben Punkte.

Dieser Lehrsatz spricht eine schon angeführte (Nr. 67, links) Eigenschaft der projectivischen Punktreihen aus. Setzen wir nämlich voraus, man habe auf den Geraden a und b die projectivischen Punktreihen, welche durch die Sekanten a', b', c bestimmt werden; wird die erste Punktreihe aus dem Punkte $c\,a'$, die zweite aus dem Punkte $c\,b'$ projicirt, so hat man zwei perspectivische Büschel, deren gemeinsamer Schnitt die Verbindungslinie r der Punkte $a\,b'$ und $b\,a'$ ist. Verlangt man also denjenigen Punkt der zweiten Punktreihe, welcher dem Punkte $a\,b$ der ersten entspricht, oder den Berührungspunkt der Tangente b, so hat man nur die Gerade q zu ziehen, welche $a\,b$ aus $c\,a'$ projicirt und durch die Punkte $c\,b'$ und $q\,r$ die Gerade p zu legen; der Punkt $p\,b$ wird der verlangte sein.

Mit Hülfe der soeben aufgestellten Eigenschaft des umschriebenen Fünfecks werden folgende Aufgaben gelöst:

1. Fünf Tangenten eines Kegelschnittes sind gegeben; man soll den Berührungspunkt einer derselben bestimmen *).

Besonderer Fall. Vier Tangenten einer Parabel sind gegeben; man soll ihre Berührungspunkte und den unendlich fernen Punkt suchen.

2. Mit Hülfe der Tangenten einen Kegelschnitt zu construiren, von welchem vier Tangenten und ein Berührungspunkt gegeben sind.

Besondere Fälle. Mit Hülfe der Tangenten eine Hyperbel zu zeichnen, von welcher drei Tangenten und eine Asymptote gegeben sind.

Mit Hülfe der Tangenten eine Parabel zu zeichnen, von welcher drei Tangenten und der unendlich ferne Punkt oder drei Tangenten und ein Berührungspunkt gegeben sind.

Diejenigen Folgerungen aus dem Lehrsatze des Brianchon, welche das umschriebene Vierseit und das Dreieck betreffen, sind keine anderen als die Sätze der Nummern 135 und 139; sie sind zu den Sätzen der Nummern 129 und 137 ebenso correlativ, wie es die Sätze der Nummern 127 und 141 unter sich sind.

Es wird eine sehr nützliche Uebung für den Schüler sein,

*) Maclaurin, loc. cit., §. 41.

wenn er die in diesem Abschnitt (§ 16) angeführten Aufgaben ganz allein löst; die Constructionen werden auf zwei correlative, durch die Lehrsätze des Pascal und des Brianchon unmittelbar gegebene, zurückgeführt.

142. Die Folgerungen aus den Lehrsätzen des Pascal und des Brianchon zeigen, dass ebenso wie ein Kegelschnitt durch fünf Punkte oder fünf Tangenten eindeutig bestimmt ist, er auch durch vier Punkte und die Tangente in einem derselben, durch vier Tangenten und einen Berührungspunkt, durch drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben, durch drei Tangenten und zwei Berührungspunkte eindeutig bestimmt werden kann. Daraus folgt:

1. Eine unendliche Anzahl von Kegelschnitten kann durch drei Punkte gehen und eine gegebene Gerade in einem dieser Punkte berühren, oder durch zwei gegebene Punkte gehen und darin zwei gegebene Geraden berühren; aber nicht zwei dieser Kegelschnitte können noch einen anderen gemeinsamen Punkt haben;

2. eine unendliche Anzahl von Kegelschnitten kann eine gegebene Gerade in einem Punkte und zwei andere gegebene Geraden oder zwei gegebene Geraden in gegebenen Punkten berühren; aber nicht zwei dieser Kegelschnitte können noch eine andere gemeinsame Tangente haben.

Berühren also zwei Kegelschnitte eine gegebene Gerade in demselben Punkte (d. h. berühren sich die Kegelschnitte selbst in diesem Punkte), so können sie ausserdem nicht mehr als zwei gemeinsame Tangenten oder gemeinsame Punkte haben; berühren zwei Kegelschnitte zwei gegebene Geraden in gegebenen Punkten (d. h. berühren sich zwei Kegelschnitte in zwei Punkten), so können sie keine anderen gemeinsamen Punkte oder Tangenten haben.

Berühren zwei Kegelschnitte eine Gerade a in einem Punkte A, so vertritt dieser Punkt zwei Schnittpunkte und die Gerade a zwei gemeinsame Tangenten.

§ 17. **Lehrsatz von Desargues.**

143. Ein Viereck QRST sei einem Kegelschnitt eingeschrieben (Fig. 112); eine beliebige Transversale s schneide die Sei-

Ein Vierseit $qrst$ (Fig. 113) sei einem Kegelschnitt umschrieben; aus einem beliebigen Punkte S ziehe man die Geraden a, a',

ten Q T, R S, Q R und T S in den Punkten A, A′, B und B′ und den Kegelschnitt in den Punkten P und P′.

b und b' nach den Eckpunkten qt, rs, qr und ts des Vierseits und die Tangenten p und p' an den Kegelschnitt.

Fig. 112.

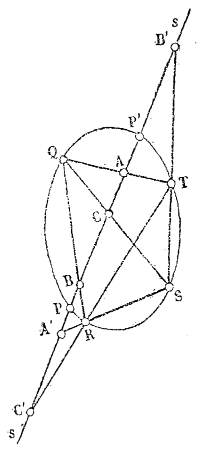
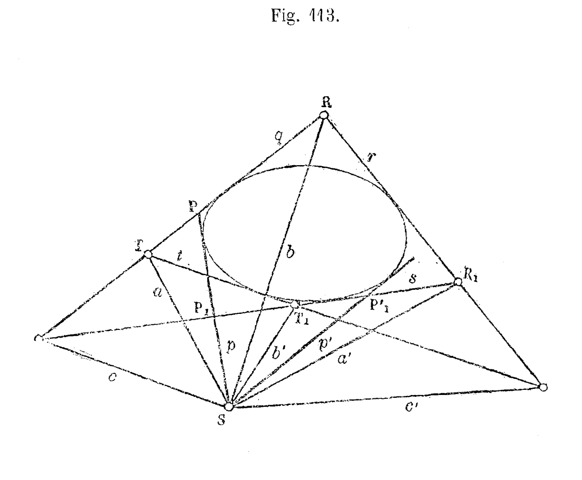


Fig. 113.



Die beiden Strahlengruppen, welche, aus Q und S, die Punkte P, R, P′ und T des Kegelschnittes projiciren, sind projectivisch (Nr. 113), demnach sind die beiden Gruppen der Punkte P B P′ A und P A′ P′ B′, wo diese Strahlen von der Transversalen geschnitten werden, ebenfalls projectivisch. Also sind (Nr. 38) die Gruppen P B P′ A und P′ B′ P A′ projectivisch, d. h. (Nr. 94) die drei Punktenpaare

P P′ . A A′ . B B′

bilden eine Involution.

Oder, als Lehrsatz von Desargues *):

Die beiden Gruppen der Punkte, in welchen q und s die Tangenten p, r, p' und t des Kegelschnittes treffen, sind projectivisch (Nr. 113), also sind die beiden Strahlenbüschel $p\,b\,p'\,a$ und $p\,a'\,p'\,b'$, welche diese Punkte aus S projiciren, ebenfalls projectivisch. Darum sind (Nr. 38) die Gruppen $p\,b\,p'\,a$ und $p'\,b'\,p\,a'$ projectivisch, d. h. (Nr. 94) die drei Strahlenpaare

$$p\,p' \,.\, a\,a' \,.\, b\,b'$$

bilden eine Involution.

Der correlative Satz des Lehrsatzes von Desargues heisst also:

*) Loc. cit., S. 171, 176.

Eine beliebige Transversale schneidet einen Kegelschnitt und die Gegenseiten eines eingeschriebenen Vierecks in drei Paaren conjugirter Punkte einer Involution.

Die von einem beliebigen Punkte an einen Kegelschnitt gelegten Tangenten und die von demselben Punkte an die Gegenecken eines umschriebenen Vierseits gezogenen Geraden bilden drei Paare conjugirter Strahlen einer Involution.

144. Dieser Lehrsatz kann ebenso wie derjenige von Pascal (Nr. 117, rechts) dazu dienen, punktweise den Kegelschnitt zu construiren, von welchem fünf Punkte P Q R S T gegeben sind (Fig. 112). Ziehen wir nämlich durch P eine beliebige Transversale s, welche Q T, R S, Q R und T S in A, A′, B und B′ schneidet; construiren dann den Punkt P′, so dass er dem Punkte P in der durch die Punktenpaare A A′ und B B′ (Nr. 102) bestimmten Involution entspricht, so wird P′ ein weiterer Punkt des gesuchten Kegelschnittes sein.

Dieser Lehrsatz kann ebenso wie derjenige des Brianchon (Nr. 117, links) dazu dienen, mit Hülfe von Tangenten den Kegelschnitt zu construiren, von welchem fünf Tangenten $p\,q\,r\,s\,t$ (Fig. 113) gegeben sind. Nehmen wir nämlich auf p einen beliebigen Punkt S und ziehen aus diesem Punkte die Strahlen a, a', b und b' nach den Punkten $q\,t$, $r\,s$, $q\,r$, $t\,s$; construiren wir dann (Nr. 102) den p entsprechenden Strahl p' der Involution, welche durch die Strahlenpaare $a\,a'$, $b\,b'$ bestimmt ist, so wird p' eine weitere Tangente des gesuchten Kegelschnittes sein.

145. Das Paar C C′ derjenigen Punkte, in welchen die Transversale die Diagonalen Q S und R T des eingeschriebenen Vierecks schneidet, gehört ebenfalls (Nr. 101, links) der durch die Punkte A A′, B B′ bestimmten Involution an.

Das Paar $c\,c'$ derjenigen Strahlen, welche aus S die Schnittpunkte $q\,s$ und $r\,t$ der Gegenseiten des umschriebenen Vierseits projiciren, gehört ebenfalls (Nr. 101, rechts) der durch die Strahlen $a\,a'$, $b\,b'$ bestimmten Involution an.

Da überdies die Punkte A A′, B B′ zur Bestimmung der Involution ausreichen, so sind die Punkte P und P′ conjugirte

Da überdies die Strahlen $a\,a'$, $b\,b'$ zur Bestimmung der Involution ausreichen, so sind die Strahlen p und p' conjugirte

Punkte dieser Involution für jeden Kegelschnitt, der dem Viereck QRST umschrieben wird. Oder:

Alle demselben Viereck umschriebenen Kegelschnitte werden von einer beliebigen Transversalen in conjugirten Punkten einer Involution geschnitten.

Hat die Involution Doppelpunkte, so vertritt jeder zwei zusammenfallende (oder unendlich nahe liegende) Durchschnitte P und P′, d. h. er ist der Berührungspunkt der Transversalen und eines dem Viereck umschriebenen Kegelschnittes.

Es gibt also entweder zwei Kegelschnitte, welche durch vier gegebene Punkte QRST gehen und eine gegebene Gerade *s* (die nicht durch einen dieser Punkte geht) berühren oder es gibt keinen Kegelschnitt, der diese Bedingungen erfüllt.

Strahlen dieser Involution für jeden Kegelschnitt, der dem Vierseit *qrst* eingeschrieben wird. Oder:

Die Tangentenpaare, die von irgend einem Punkte aus an diejenigen Kegelschnitte gezogen werden, welche demselben Vierseit eingeschrieben sind, bilden eine Involution.

Hat die Involution Doppelstrahlen, so vertritt jeder zwei zusammenfallende (oder unendlich nahe liegende) Tangenten *p* und *p′*, d. h. er ist in S Tangente eines dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnittes.

Es gibt also entweder zwei Kegelschnitte, welche vier gegebene Geraden *qrst* berühren und durch einen gegebenen Punkt S gehen (der auf keiner der gegebenen Geraden liegt) oder es gibt keinen Kegelschnitt, der diese Bedingungen erfüllt.

146. Sind von den sechs Punkten AA′, BB′, PP′ einer Involution fünf gegeben, so ist der sechste bestimmt (Nr. 102). Nehmen wir darum in Fig. 112 an, es sei der Kegelschnitt gegeben und das Viereck in der Weise veränderlich, dass die Punkte AA′B fest bleiben, so ist auch der Punkt B′ unveränderlich, oder:

Verändert sich ein Viereck, das immer einem

Sind von den sechs Strahlen *aa′*, *bb′*, *pp′* einer Involution fünf gegeben, so ist der sechste bestimmt (Nr. 102). Nehmen wir darum in Fig. 113 an, es sei der Kegelschnitt gegeben und das Vierseit in der Weise veränderlich, dass die Strahlen *aa′b* fest bleiben, so ist auch der Strahl *b′* unveränderlich, oder:

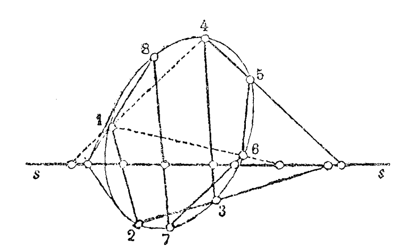
Verändert sich ein Vierseit, das immer einem

Kegelschnitt eingeschrieben bleibt, der Art, dass sich drei seiner Seiten um drei feste Punkte einer Geraden drehen, so dreht sich auch die vierte Seite um einen vierten Punkt derselben Geraden.

Kegelschnitt umschrieben bleibt, der Art, dass drei seiner Eckpunkte auf drei festen, von einem Punkte ausgehenden, Geraden hingleiten, so gleitet auch der vierte Eckpunkt auf einer vierten durch denselben Punkt gehenden Geraden fort.

Derselbe Lehrsatz (links) gilt für irgend ein eingeschriebenes Polygon mit gerader Seitenzahl. Nehmen wir an, das eingeschriebene Polygon habe $2n$ Seiten und es verändere sich der Art, dass seine $2n - 1$ ersten Seiten je durch eben so viele feste Punkte einer Geraden s gehen (Fig. 114). Ziehen wir aus dem ersten Eckpunkte Diagonalen nach dem vierten, sechsten, achten, ... $2(n - 1)^{\text{ten}}$, so wird das Po-

Fig. 114.



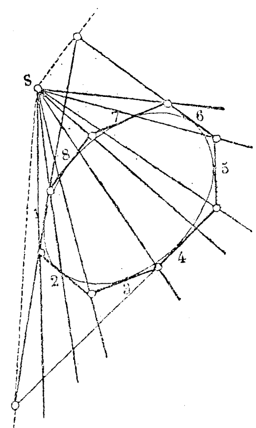
lygon in $n - 1$ einfache Vierecke getheilt. Im ersten dieser Vierecke gehen die drei ersten Seiten (welche die drei ersten Seiten des Polygons sind) durch drei feste Punkte von s, also wird die vierte Seite (welche die erste Diagonale des Polygons ist) durch einen festen Punkt von s gehen. Im zweiten Viereck gehen die drei ersten Seiten (die erste Diagonale, die vierte und fünfte Seite des Polygons) durch drei feste Punkte von s, also wird auch die vierte Seite (zweite Diagonale des Polygons) durch einen festen Punkt von s gehen. Fährt man in derselben Weise fort, so kommt man zum letzten Viereck und findet, dass die vierte Seite dieses Vierecks

oder die $2\,n^{\text{te}}$ Seite des Polygons ebenfalls durch einen festen Punkt von s geht. Oder:

Verändert sich ein Polygon von gerader Seitenzahl $2\,n$, das einem gegebenen Kegelschnitt eingeschrieben bleibt, der Art, dass alle Seiten, eine ausgenommen, durch eben so viele feste Punkte einer Geraden gehen, so wird auch die letzte Seite durch einen festen Punkt derselben Geraden gehen *).

Kann man aus dem festen Punkt, um welchen sich die letzte Seite dreht, Tangenten an den Kegelschnitt ziehen, und betrachtet man jede derselben als eine Lage der letzten Seite, so werden die zwei auf dieser Seite liegenden Eckpunkte zusammenfallen und das Polygon hat nur noch $2\,n - 1$ Eckpunkte. Der Berührungspunkt jeder der beiden Tangenten wird also ein Eckpunkt des dem Kegelschnitt eingeschriebenen Vielecks von $2\,n - 1$ Seiten sein, dessen Seiten durch die $2\,n - 1$ gegebenen Punkte einer Geraden gehen.

Fig. 115.



Der Studirende möge übungsweise den correlativen Lehrsatz beweisen:

Verändert sich ein Vieleck von gerader Seiten-

*) Poncelet, loc. cit., Nr. 513.

zahl $2n$, das immer einem gegebenen Kegelschnitt umschrieben bleibt, der Art, dass seine Eckpunkte, einer ausgenommen, auf eben so vielen von demselben Centrum ausgehenden Strahlen hingleiten, so gleitet auch der letzte Eckpunkt auf einem festen Strahle fort, der von diesem Centrum ausgeht (Fig. 115).

Schneidet dieser letzte Strahl den Kegelschnitt in zwei Punkten und legt man in jedem derselben die Tangente, so wird eine solche zur Seite eines umschriebenen Polygons von $2n - 1$ Seiten, dessen Eckpunkte auf den $2n - 1$ gegebenen Geraden liegen.

147. Nehmen wir an, dass die Punkte S und T auf dem Kegelschnitt einander unendlich nahe liegen (Fig. 116) oder dass die Gerade S T zur Tangente in S werde, so geht das Viereck Q R S T in das eingeschriebene Dreieck Q R S über und aus dem Lehrsatze von Desargues folgt:

Nehmen wir an, dass die Tangenten s und t unendlich nahe zusammen rücken (Fig. 117) oder dass s im Punkte st Tangente an den Kegelschnitt werde, so geht das Vierseit $qrst$ in ein umschriebenes Dreiseit qrs über und der Lehrsatz Nr. 144 (rechts) heisst dann:

Fig. 116.

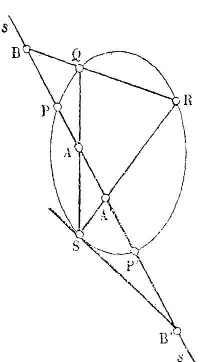
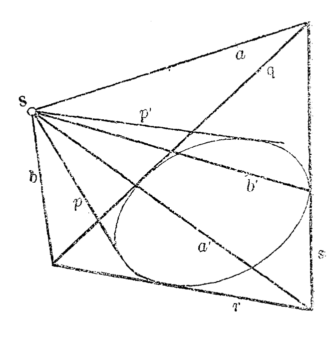


Fig. 117.



Ist ein Dreieck Q R S einem Kegelschnitt eingeschrieben und schneidet eine Transversale s die

Ist ein Dreiseit qrs einem Kegelschnitt umschrieben und zieht man aus einem Punkte S die Tangenten p

Curve in zwei Punkten P und P', zwei Seiten des Dreiecks in den Punkten A und A', die dritte Seite und die Tangente im gegenüberliegenden Eckpunkt in den Punkten B und B', so bilden diese drei Punktenpaare eine Involution.

und p' an den Kegelschnitt, dann die Geraden a und a' nach zwei Eckpunkten des Dreiseits und endlich die Geraden b und b' nach dem dritten Eckpunkt und dem Berührungspunkt der gegenüberliegenden Seite, so bilden diese drei Strahlenpaare eine Involution.

148. Mit diesem Lehrsatze construirt man in S eine Tangente an den Kegelschnitt, von dem fünf Punkte P P' Q R S gegeben sind. Sind nämlich A, A' und B die Schnittpunkte der Geraden P P' und der Dreieckseiten Q S, R S und Q R, so construiren wir (Nr. 102) zu B den conjugirten Punkt B' der Involution, welche durch die beiden Paare A A', P P' bestimmt ist; B' S wird die verlangte Tangente sein.

Mit diesem Lehrsatze construirt man den Berührungspunkt der Tangente s an den Kegelschnitt, von dem die fünf Tangenten $p\,p'\,q\,r\,s$ gegeben sind. Sind nämlich a, a' und b die Strahlen, welche die Punkte $q\,s$, $r\,s$, $q\,r$ aus dem Punkte $p\,p'$ projiciren, so construiren wir (Nr. 102) zu b den conjugirten Strahl b' der Involution, welche durch die beiden Paare $a\,a'$, $p\,p'$ bestimmt ist; $b'\,s$ wird der verlangte Berührungspunkt sein.

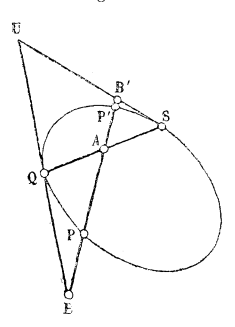
149. Nehmen wir jetzt an, dass auch die Punkte Q und R (Fig. 118) auf dem Kegelschnitt einander unendlich nahe rücken, d. h. dass Q R eine Tangente in Q werde, so haben wir statt der Seiten des eingeschriebenen Vierecks Q R S T die beiden Tangenten in den Punkten Q und S und die Berührungssehne Q S *).

Nehmen wir jetzt an, dass auch die Tangenten q und r einander unendlich nahe rücken, d. h. dass q im Punkte $q\,r$ Tangente an den Kegelschnitt sei, so haben wir statt der Eckpunkte des umschriebenen Vierseits $q\,r\,s\,t$ die Berührungspunkte der Tangenten q und s und ihren Schnittpunkt $q\,s$ (Fig. 119).

*) D. h. die Verbindungslinie der Berührungspunkte beider Tangenten.

Da jetzt die Geraden QT und RS in eine einzige Gerade QS zusammenfallen, so werden auch die Punkte A und A′ in einen einzigen Punkt A zusammenfallen, welcher folglich eines der Doppelelemente der Involution sein wird, die durch die Paare PP′ und BB′ bestimmt ist. Der Lehrsatz von Desargues wird also zum folgenden:

Fig. 148.

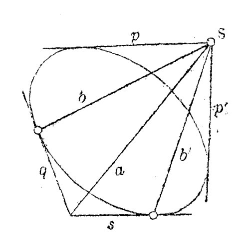


Schneidet eine Transversale einen Kegelschnitt in zwei Punkten P und P′, zwei seiner Tangenten in zwei andern Punkten B und B′ und die Berührungssehne in A, so ist dieser letztere Punkt ein Doppelpunkt der Involution, welche durch die Paare PP′ und BB′ bestimmt ist; oder:

Berührt ein veränderlicher Kegelschnitt zwei gegebene Geraden und geht

Da jetzt die Punkte $q\,t$ und $r\,s$ in einen einzigen Punkt $q\,s$ zusammenfallen, so werden auch die Strahlen a und a' in einen einzigen Strahl a zusammenfallen, welcher folglich eines der Doppelelemente der Involution sein wird, die durch die Paare $p\,p'$ und $b\,b'$ bestimmt ist. Wir schliessen also aus dem Lehrsatze Nr. 144 (rechts):

Fig. 149.



Zieht man aus einem Punkte S die Tangenten p und p' an einen Kegelschnitt und projicirt man aus demselben Punkte S zwei Punkte der Curve und den Schnittpunkt der Tangenten in diesen beiden Punkten mit Hülfe der Strahlen b, b' und a, so ist die Gerade a ein Doppelstrahl der Involution, welche durch die Paare pp' und $b\,b'$ bestimmt ist; oder:

Berührt ein veränderlicher Kegelschnitt, der durch zwei gegebene

er durch zwei gegebene Punkte PP′, so geht die Berührungssehne durch einen festen Punkt von PP′.

Verändern sich gleichzeitig mit dem Kegelschnitt auch die Tangenten Q U und S U, während die Punkte P P′ B B′ fest bleiben, so muss die Berührungssehne immer durch einen der Doppelpunkte der durch die Paare P P′ und B B′ bestimmten Involution gehen. Sind also vier Punkte P, P′, B, B′ einer Geraden gegeben und legt man an einen durch P und P′ gehenden Kegelschnitt die zwei Tangentenpaare, die von B und B′ ausgehen, combinirt man hierauf jede von B ausgehende Tangente mit jeder von B′ ausgehenden, so erhält man vier Berührungssehnen, welche sich paarweise in den Doppelpunkten der Involution P P′ . B B′ schneiden *).

150. Hieraus ergibt sich eine Construction der Tangente in S an einen Kegelschnitt, der durch vier Punkte P, P′, Q und S und die Tangente in Q bestimmt ist (Fig. 118). Sind nämlich A und B die Schnittpunkte von P P′ mit Q S und der gegebenen

Punkte geht, zwei gegebene Geraden p und p', so schneiden sich die Tangenten in diesen Punkten auf einer durch $p\,p'$ gehenden festen Geraden.

Verändern sich gleichzeitig mit dem Kegelschnitt auch die Berührungspunkte von q und s, während die Geraden $p\,p'\,b\,b'$ fest bleiben, so muss der Schnittpunkt $q\,s$ immer auf einen der Doppelstrahlen der durch die Paare $p\,p'$ und $b\,b'$ bestimmten Involution fallen. Sind also vier Strahlen p, p', b, b' eines Büschels gegeben und construirt man einen p und p' berührenden Kegelschnitt sowie die beiden Tangentenpaare an die Curve in denjenigen Punkten, wo sie die Geraden b und b' schneidet, combinirt hierauf die Tangente in jedem der beiden Schnittpunkte von b mit der Tangente in jedem der beiden Schnittpunkte von b', so erhält man vier Schnittpunkte, welche sich paarweise auf den Doppelstrahlen der Involution $p\,p'\,.\,b\,b'$ befinden.

Hieraus ergibt sich eine Construction des Berührungspunktes der Tangente s an den durch die vier Tangenten p, p', q, s und den Berührungspunkt von q bestimmten Kegelschnitt (Fig. 119). Sind nämlich a und b diejenigen Strahlen, welche aus $p\,p'$ bezüg-

*) Brianchon, loc. cit., S. 20, 21.

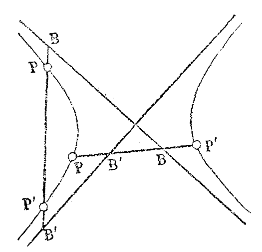
Tangente, so construiren wir den zu B conjugirten Punkt B′ in der durch das Paar P P′ und den Doppelpunkt A bestimmten Involution. Die Gerade S B′ wird die gesuchte Tangente sein.

lich den Punkt $q\,s$ und den gegebenen Berührungspunkt projiciren, so construiren wir den zu b conjugirten Strahl b' in der durch das Paar $p\,p'$ und den Doppelstrahl a bestimmten Involution. Der gesuchte Punkt wird $s\,b'$ sein.

151. Setzen wir in dem vorhergehenden Lehrsatz (Nr. 149) voraus, es sei der Kegelschnitt eine Hyperbel (Fig. 120) und sind die gegebenen Tangenten die Asymptoten, so ist die ganze Sehne Q S in unendlicher Ferne.

Die Involution (P P′ . B B′ . . .) hat also einen Doppelpunkt in unendlicher Ferne, das andere Doppelelement (Nr. 52 und 96) ist der gemeinsame Mittelpunkt der Segmente P P′, B B′. . . Oder:

Fig. 120.



Schneidet man eine Hyperbel und ihre Asymptoten durch eine Transversale, so haben die beiden Segmente derselben, welche von der Curve und den Asymptoten herausgeschnitten werden, denselben Mittelpunkt.

Daraus folgt, dass

$$P\,B = B'\,P' \text{ und } P\,B' = B\,P' \; {}^{*})$$

und hieraus eine Regel für die Construction einer Hyperbel, von welcher beide Asymptoten und ein Punkt gegeben sind *1).

152. Nehmen wir jetzt im Lehrsatze Nr. 149 an, die Punkte P und P′ seien unendlich nahe bei

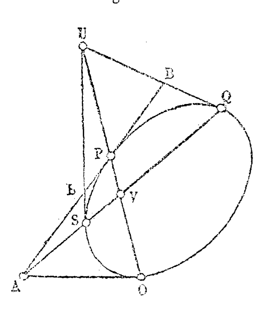
Nehmen wir in dem Lehrsatz Nr. 149 an, die Tangenten p und p' seien unendlich nahe bei

*) Apollonius, loc. cit., II. 8, 16.

*1) Apollonius, loc. cit., II. 4.

einander, d. h. die Transversale sei eine Tangente an den Kegelschnitt (Fig. 121), dann ist der Berührungspunkt P der zweite Doppelpunkt der durch das

Fig. 121.



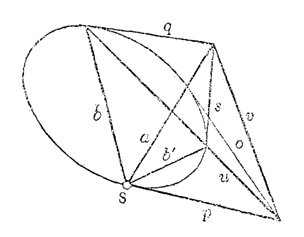
Paar B B′ und den Doppelpunkt A bestimmten Involution; also sind die vier Punkte P, A, B, B′ harmonisch (96); oder:

In einem umschriebenen Dreieck (U B B′) wird jede Seite (B B′) durch ihren Berührungspunkt (P) und die Verbindungslinie der Berührungspunkte (Q und S) der beiden anderen Seiten harmonisch getheilt.

Man kann aus A eine zweite Tangente ziehen; ihr Berührungspunkt sei O. Die harmonischen Punkte P, A, B, B′ sind: der Berührungspunkt der Tangente A B und die Schnittpunkte dieser Tangente mit den drei anderen Tangenten O A, Q B und S B′, also (Nr. 113) werden die vier Tangenten A B, O A, Q B

einander, d. h. der Punkt S liege auf dem Kegelschnitt selbst (Fig. 122), dann ist die Tangente in S der zweite Doppelstrahl der durch das Paar $b\,b'$

Fig. 122.



und den Doppelstrahl a bestimmten Involution; also sind die vier Strahlen p, a, b, b' harmonisch (Nr. 96); oder:

In einem eingeschriebenen Dreieck ($u\,b\,b'$) wird jeder Winkel ($b\,b'$) durch die Tangente p in seinem Scheitel und die Verbindungslinie dieses Scheitels mit dem Schnittpunkt der Tangenten (q und s) in den beiden anderen Eckpunkten harmonisch getheilt.

Die Gerade a trifft den Kegelschnitt in einem zweiten Punkte; die Tangente in diesem Punkte sei o. Die harmonischen Geraden p, a, b, b' sind: die Tangente in S und die Verbindungslinien von S mit drei anderen Punkten des Kegelschnittes (Berührungspunkte von o, q und s): also (Nr. 113) werden diese vier

und S B′ von jeder beliebigen anderen Tangente in vier harmonischen Punkten geschnitten, d. h. diese vier Tangenten sind harmonisch (Nr. 111). Da zugleich die Verbindungslinie Q S der Berührungspunkte der conjugirten Tangenten Q B und S B′ durch den Punkt A geht, so haben wir den Satz:

Geht die Berührungssehne zweier Tangenten eines Kegelschnittes durch den Schnittpunkt von zwei anderen Tangenten, so werden die ersteren durch die beiden letzteren harmonisch getrennt.

Und umgekehrt:

Sind vier Tangenten an einen Kegelschnitt harmonisch, so geht die Berührungssehne von zwei conjugirten Tangenten durch den Schnittpunkt der beiden anderen.

Punkte aus jedem andern Punkte des Kegelschnittes durch vier harmonische Strahlen projicirt, d. h. es sind vier harmonische Punkte (Nr. 109) des Kegelschnittes. Da zugleich der Schnittpunkt der Tangenten *q* und *s* auf der Berührungssehne der Tangenten *p* und *o* liegt, so haben wir den Satz:

Liegt der Schnittpunkt der Tangenten an zwei Punkte eines Kegelschnittes auf der Verbindungslinie von zwei anderen Punkten desselben, so sind die beiden ersten Punkte durch die beiden letzteren harmonisch getrennt.

Und umgekehrt:

Sind vier Punkte eines Kegelschnittes harmonisch, so liegt der Schnittpunkt der Tangenten an zwei conjugirte Punkte auf der Verbindungslinie der beiden anderen.

153. Diese beiden correlativen Sätze können vermöge der schon (Nr. 112 und 113) auseinandergesetzten Eigenschaft, dass an vier harmonischen Punkten eines Kegelschnittes auch vier harmonische Tangenten liegen und umgekehrt, in einen einzigen Satz vereinigt werden:

Schneiden sich zwei Tangenten eines Kegelschnittes in einem Punkte der Berührungssehne von zwei anderen Tangenten, so liegt auch umgekehrt der Schnittpunkt der letzteren auf der Berührungssehne der ersteren und die vier Tangenten (sowie ihre Berührungspunkte) bilden eine harmonische Gruppe *).

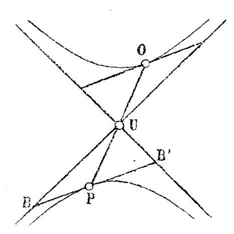
*) De la Hire, loc. cit., Buch I, S. 30. — Steiner, loc. cit., S. 159. § 43.

In der Fig. 121 geht QS durch A, den Schnittpunkt von PA und OA, und ebenso OP durch U, den Schnittpunkt von QB und SB′; so wie die Geraden U (Q, S, P, A) harmonisch sind, so sind es auch die Geraden A (O, P, Q, U).

In der Fig. 122 sehen wir: ebenso wie der Punkt $q\,s$ auf a, der Berührungssehne von o und p, liegt, so ist auch der Punkt $o\,p$ auf der Geraden u, welche die Berührungspunkte von q und s verbindet; und ebenso wie die vier Punkte u (q, s, p, a) harmonisch sind, so sind es auch die vier Punkte a (o, p, q, u).

154. Beispiel. Nehmen wir an, der Kegelschnitt sei eine Hyperbel (Fig. 123); die Asymptoten sind zwei Tangenten, deren

Fig. 123.



Berührungssehne QS die unendlich ferne Gerade ist. Folglich liegen die Berührungspunkte von zwei parallelen Tangenten mit dem Schnittpunkt U der Asymptoten in derselben Geraden; und umgekehrt, zieht man durch U eine Transversale, welche die Curve in zwei Punkten P und O schneidet, so sind die Tangenten in diesen beiden Punkten parallel. In der Mitte zwischen den Berührungspunkten P und O liegt der Punkt U, weil im Allgemeinen (Fig. 121) die Gruppe UVPO harmonisch ist und hier V unendlich ferne liegt.

Eine beliebige Tangente schneidet die beiden Asymptoten in zwei Punkten B und B′, welche durch den Berührungspunkt P und die Berührungssehne der Asymptoten harmonisch getrennt sind; diese letztere aber ist die unendlich ferne Gerade, also ist P die Mitte von BB′ oder:

Der zwischen den Asymptoten liegende Theil einer Tangente an die Hyperbel wird durch den Berührungspunkt halbirt *).

*) Apollonius, loc. cit., II. 319.

Dieser Satz ist ein besonderer Fall von demjenigen in Nr. 151.

155. Da nach dem Satze von Desargues (Nr. 143) die Punktenpaare PP', AA', BB' (Fig. 112) eine Involution bilden, so haben wir die gleichen Doppelverhältnisse $(PP'AB) = (P'PA'B')$ oder

$$\frac{PA}{P'A} : \frac{PB}{P'B} = \frac{P'A'}{PA'} : \frac{P'B'}{PB'} = \frac{PB'}{P'B'} : \frac{PA'}{P'A'}.$$

Nun aber ist $PA : P'A$ gleich dem Verhältniss der Entfernungen (in einer beliebig angenommenen Richtung gemessen) der Punkte P und P′ von der Geraden QT; die anderen Verhältnisse in der obigen Gleichung haben eine entsprechende Bedeutung; man kann also schreiben:

$$\frac{(A)}{(A)'} : \frac{(B)}{(B)'} = \frac{(B')}{(B')'} : \frac{(A')}{(A')'}$$

oder

$$\frac{(A) \,.\, (A')}{(B) \,.\, (B')} = \frac{(A)' \,.\, (A')'}{(B)' \,.\, (B')'},$$

worin (A), (A'), (B), (B') die Entfernungen (senkrechten oder schiefen unter gegebenen Winkeln) des Punktes P von den Seiten QT, RS, QR, ST des eingeschriebenen Vierecks QRST und $(A)'$, $(A')'$, $(B)'$, $(B')'$ die Entfernungen (unter beziehungsweise gleichen Winkeln) des Punktes P′ von denselben Seiten bedeuten. Die obige Gleichung sagt also aus, dass das Verhältniss

$$\frac{(A) \,.\, (A')}{(B) \,.\, (B')}$$

für jeden Punkt P des Kegelschnittes constant ist; oder es ist der Satz bewiesen:

Ist ein Viereck einem Kegelschnitt eingeschrieben, so steht das Product der Entfernungen eines beliebigen Punktes der Curve von zwei Gegenseiten zu dem Product der Entfernungen desselben Punktes von den zwei anderen Gegenseiten in einem constanten Verhältniss *).

156. In eine ähnliche Form lässt sich auch der Satz (Nr. 143,

*) Chasles nennt diesen Satz den Lehrsatz des Pappus, weil er der berühmten Aufgabe: „problema ad quatuor lineas“ dieses alten Geometers entspricht. Aperçu historique, S. 37 und 338.

rechts) bringen, der eine Folgerung desjenigen von Desargues ist. Bezeichnen wir die Eckpunkte qr, qt, st und sr des umschriebenen Vierseits $qrst$ mit R, T, T_1, R_1 (Fig. 113), die Schnittpunkte der Tangenten p und p' mit der Seite q mit P und P' und die Schnittpunkte derselben Tangenten mit der Gegenseite s mit P_1 und P_1'. Nach dem Lehrsatze 113, II sind die Doppelverhältnisse (R T P P') und (R_1 T_1 P_1 P_1') gleich, man hat also:

$$\frac{RP}{TP} : \frac{RP'}{TP'} = \frac{R_1P_1}{T_1P_1} : \frac{R_1P_1'}{T_1P_1'}$$

oder

$$\frac{RP \,.\, T_1P_1}{TP \,.\, R_1P_1} = \frac{RP' \,.\, T_1P_1'}{TP' \,.\, R_1P_1'}.$$

Nun aber ist RP : TP gleich dem Verhältniss der Entfernungen (in derselben, beliebigen Richtung genommen) der Punkte R und T von der Geraden p; gerade so ist $T_1P_1 : R_1P_1$ gleich dem Verhältniss der Entfernungen der Punkte T_1 und R_1 von derselben Geraden p. Obige Gleichung drückt also aus, dass das Verhältniss

$$\frac{RP \,.\, T_1P_1}{TP \,.\, R_1P_1}$$

für jede Tangente p constant ist; oder:

Ist ein Vierseit einem Kegelschnitt umschrieben, so steht das Product der Entfernungen zweier Gegenecken von einer beliebigen Tangente zu dem Product der Entfernungen der beiden anderen Gegenecken von derselben Tangente in einem constanten Verhältniss *).

§ 18. Entsprechend gemeinschaftliche Elemente und Doppelelemente.

157. Zwei projectivische Strahlenbüschel, concentrische oder nicht concentrische, seien gegeben; durch ihren gemeinsamen Mittelpunkt oder durch ihre Centren O und O' legen wir einen Kegelschnitt oder einen Kreis, der die Strahlen des ersten Büschels in A, B, C... und die Strahlen des zweiten Büschels in A', B', C',... schneidet.

---

*) Chasles, Sect. coniques, Nr. 26.

Projiciren wir diese beiden Reihen von Punkten aus zwei neuen Punkten O_1 und O_1' (oder aus demselben Punkt) des Kegelschnittes, so sind die beiden projicirenden Büschel O_1 (ABC...) und O_1' (A'B'C'...) (Nr. 113) bezüglich projectivisch zu den beiden gegebenen Büscheln O (ABC...) und O' (A'B'C'...), folglich sind sie auch zu einander projectivisch.

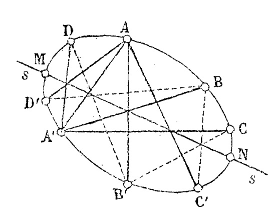
Die beiden Reihen von Punkten ABC... und A'B'C'... werden projectivische Reihen genannt *).

I. Projiciren wir jetzt diese beiden Reihen (Fig. 124) aus zwei ihrer entsprechenden Punkte, z. B. A' und A. Die projicirenden Büschel

A' (A, B, C, ...) und A (A', B', C', ...)

werden projectivisch und da sie den entsprechend gemeinschaftlichen Strahl AA' haben, auch perspectivisch sein.

Fig. 124.



Folglich (62) werden sich die Paare der entsprechenden Strahlen auf einer festen Geraden schneiden, oder die Schnittpunkte AB' und A'B, AC' und A'C, AD' und A'D... werden auf derselben Geraden *s* liegen. Verbindet man einen beliebigen Punkt von *s* mit den Punkten A' und A, so erhält man zwei Geraden, welche neuerdings den Kegelschnitt in zwei entsprechenden Punkten der Reihen ABCD... und A'B'C'D'... treffen.

Nimmt man statt A' und A zwei andere entsprechende Punkte, z. B. B' und B als Projectionscentren, so kommt man auf dieselbe Gerade *s*. Da nämlich AB'CA'BC' ein

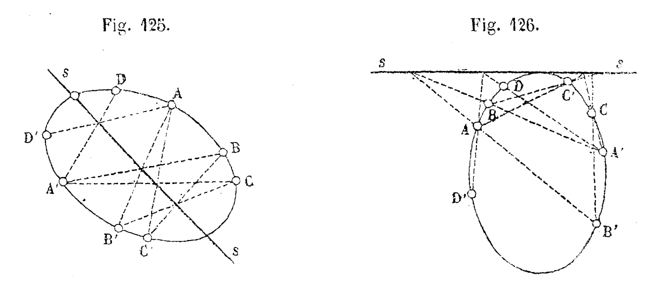
---

*) Bellavitis, Saggio di Geometria derivata (Nuovi Saggi dell' Accademia di Padova, vol. IV, 1838, S. 270 Anmerkung).

eingeschriebenes Sechseck ist, so muss nach dem Pascal'schen Satze der Schnittpunkt von B'C und BC' auf derjenigen Geraden liegen, welche durch den Schnittpunkt von A'B und AB' und den Schnittpunkt von A'C und AC' geht (117 rechts).

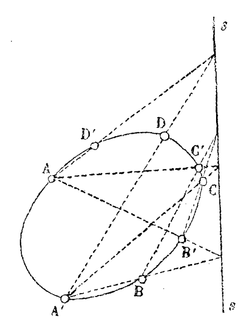
II. Jeder Schnittpunkt M des Kegelschnittes und der Geraden s ist ein entsprechend gemeinschaftlicher Punkt der beiden Reihen ABC... und A'B'C'... Es treffen nämlich

Fig. 125. Fig. 126.



die Geraden MA' und MA den Kegelschnitt in demselben Punkte M oder zwei entsprechende Punkte der beiden projectivischen Reihen sind in M vereinigt. Daraus folgt, dass die beiden Reihen entweder zwei entsprechend gemeinschaftliche Punkte haben, oder nur einen oder gar keinen, je nachdem die Gerade s den Kegelschnitt in zwei Punkten (Fig. 124) trifft, oder ihn

Fig. 127.



berührt (Fig. 126) oder keinen Punkt mit ihm gemein hat (Fig. 127).

III. Aus dem Vorhergehenden folgt, dass zwei projectivische Reihen von Punkten eines Kegelschnittes durch drei Paare entsprechender Punkte (A, A′), (B, B′), (C, C′) bestimmt sind. Um andere Paare entsprechender Punkte und die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte, wenn es solche hat, zu finden, hat man nur die Gerade s zu construiren, welche durch die Schnittpunkte der Paare der Gegenseiten des eingeschriebenen Sechsecks A B′ C A′ B C′ (Fig. 90, 124, 125) geht. Die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte sind die Schnittpunkte von s und dem Kegelschnitt; irgend zwei entsprechende Punkte D und D′ liegen so, dass sich die Geraden A′ D und A D′ (oder B′ D und B D′, oder C′ D und C D′) auf s schneiden *).

158. Statt der projectivischen Reihen von Kegelschnittpunkten kann man auch projectivische Reihen von Tangenten betrachten. Sind o und o' zwei gerade projectivische Punktreihen (getrennte oder auf demselben Träger), so beschreiben wir einen Kegelschnitt, der o und o' berührt und ziehen von jedem Paar entsprechender Punkte A und A′, B und B′, C und C′, . . . die Tangenten a und a', b und b', c und c' . . . an den Kegelschnitt. Schneiden wir hierauf diese beiden Tangentenreihen $a\,b\,c\ldots$ und $a'\,b'\,c'\ldots$ bezüglich durch zwei andere Tangenten o_1 und o_1', so erhalten wir zwei neue Punktreihen, welche bezüglich zu den gegebenen Punktreihen (Nr. 113) und folglich auch zu einander projectivisch sind.

Man nennt zwei Reihen von Tangenten an einen Kegelschnitt projectivisch, wenn sie von irgend einer anderen Tangente an dieselbe Curve in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten werden.

I. Nehmen wir an, es werde die erste Reihe durch die Tangente a', die zweite Reihe durch die Tangente a geschnitten. Die beiden projectivischen Punktreihen, welche diese Schnitte geben, sind perspectivisch, da sie den entsprechend gemeinschaftlichen Punkt $a\,a'$ haben; also liegen die anderen Paare entsprechender Punkte $a'\,b$ und $a\,b'$, $a'\,c$ und $a\,c'$. . . auf solchen Geraden, die nach einem festen Punkte S gerichtet sind. Dieser

*) Steiner, loc. cit., S. 174. § 46. III.

Punkt verändert sich nicht, wenn man zwei andere Tangenten b' und b als Transversalen nimmt; denn nach dem Lehrsatze von Brianchon müssen sich in dem umschriebenen Sechseck $a\,b'\,c\,a'\,b\,c'$ die Verbindungslinien der Gegenecken $a'\,b$ und $a\,b'$, $a'\,c$ und $a\,c'$, $b'\,c$ und $b\,c'$ in demselben Punkte schneiden (Nr. 117, links).

II. Kann man aus dem Punkte S Tangenten an den Kegelschnitt legen, so wird jede derselben ein entsprechend gemeinschaftlicher Strahl der beiden projectivischen Reihen $a\,b\,c\ldots$, $a'\,b'\,c'\ldots$ sein.

III. Zwei projectivische Reihen $a\,b\,c\ldots$ und $a'\,b'\,c'\ldots$ von Tangenten an einen Kegelschnitt sind durch drei Paare entsprechender Geraden (a, a'), (b, b'), (c, c') bestimmt. Will man ein anderes Paar entsprechender Geraden und die entsprechend gemeinschaftlichen Geraden, wenn es solche gibt, finden, so hat man nur den Schnittpunkt S derjenigen Diagonalen zu construiren, welche die Paare der Gegenecken des umschriebenen Sechsecks $a\,b'\,c\,a'\,b\,c'$ verbinden. Die entsprechend gemeinschaftlichen Geraden sind die von S aus gezogenen Tangenten und irgend zwei andere entsprechende Geraden d und d' haben die Eigenschaft, dass die Schnittpunkte $a'\,d$ und $a\,d'$ (oder $b'\,d$ und $b\,d'$, oder $c'\,d$ und $c\,d'\ldots$) mit S auf derselben Geraden liegen.

IV. Eine Reihe von Punkten A, B, C... eines Kegelschnittes und eine Reihe von Tangenten a, b, $c\ldots$ derselben Curve werden projectivisch genannt, wenn der Strahlenbüschel, welcher A B C... aus irgend einem Punkte des Kegelschnittes projicirt, zu der Punktreihe, welche die Geraden a, b, $c\ldots$ auf einer beliebigen Tangente desselben Kegelschnittes bezeichnen, projectivisch ist.

Eine Reihe von Punkten A, B, C,... oder von Tangenten a, b, $c\ldots$ eines Kegelschnittes wird zu einer Punktreihe oder einem Büschel projectivisch genannt, wenn diese Punktreihe oder dieser Büschel zu demjenigen Strahlenbüschel, welcher A B C... aus einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes projicirt, oder zu der Punktreihe projectivisch ist, welche durch die Geraden a, b, $c\ldots$ auf einer beliebigen Tangente desselben Kegelschnittes bezeichnet wird.

V. Diese Definitionen angenommen, verstehen wir unter Gebilden der ersten Stufe nicht nur gerade Punktreihen

und Büschel, sondern auch die Reihen von Punkten oder Tangenten eines Kegelschnittes *); wir können alsdann folgenden allgemeinen Satz aufstellen: Sind zwei Gebilde der ersten Stufe zu einem dritten (derselben Stufe) projectivisch, so sind sie auch zu einander projectivisch (Vergl. Nr. 35).

VI. Aus denselben Definitionen folgt auch, dass der Lehrsatz von Nr. 113, III, auf folgende Art ausgedrückt werden kann:

Irgend eine Reihe von Tangenten an einen Kegelschnitt ist zu der Reihe der Berührungspunkte projectivisch.

VII. Zwei projectivische Reihen von Kegelschnittpunkten mögen A B C ... und A′ B′ C′ ..., die Tangenten in diesen Punkten aber $a\,b\,c\dots$ und $a'\,b'\,c'\dots$ sein. Die Reihen der Tangenten $a\,b\,c\dots$ und $a'\,b'\,c'\dots$ sind bezüglich zu den Reihen der Berührungspunkte A B C ... und A′ B′ C′ ... und darum auch zu einander projectivisch. Auf der Geraden s mögen sich die Linienpaare schneiden, die den Paaren A B′ und A′ B, A C′ und A′ C, B C′ und B′ C ... entsprechen und nach dem Punkte S sollen alle die Geraden laufen, auf welchen die Punktenpaare $a\,b'$ und $a'\,b$, $a\,c'$ und $a'\,c$, $b\,c'$ und $b'\,c\dots$ und ihre analogen sich befinden. Trifft s den Kegelschnitt in zwei Punkten M und N, so müssen diese Punkte entsprechend gemeinschaftliche Punkte der Reihen A B C ... und A′ B′ C′ ... sein; die Tangenten m und n in M und N müssen folglich die entsprechend gemeinschaftlichen Strahlen der Reihen $a\,b\,c\dots$ und $a'\,b'\,c'\dots$ sein, also schneiden sich die Geraden m und n in S.

VIII. Aus dem Vorhergehenden folgt, dass man die Betrachtung einer Reihe von Tangenten immer an die Stelle derjenigen der Berührungspunkte, und umgekehrt, setzen kann.

159. Betrachten wir statt zweier beliebigen projectivi-

*) Die Einführung dieser neuen Gebilde der ersten Stufe gestattet nun auch, den bisher angewandten Operationen (Schneiden durch eine Gerade und Projiciren aus einem Punkte) noch zwei weitere beizufügen; sie bestehen darin, einen Strahlenbüschel durch einen Kegelschnitt zu schneiden, der durch das Centrum des Büschels geht und eine gerade Punktreihe mit Hülfe von Tangenten eines Kegelschnittes, der den Träger der Punktreihe berührt, zu projiciren.



schen Büschel, wie in Nr. 157, eine Involution von Strahlen, die von einem Punkte O ausgehen und nehmen an, dass diese Strahlen von einem durch O gehenden Kegelschnitt in den Punktenpaaren A A′, B B′, C C′, ... geschnitten werden. Projiciren wir diese Punkte aus irgend einem andern Punkte O_1 des Kegelschnittes. Da nach der Voraussetzung (Nr. 93 und 94) die Büschel O (A . A′ . B . C ...) und O (A′ . A . B′ . C′ ...) projectivisch sind, so sind es auch die Büschel O_1 (A . A′ . B . C ...) und O_1 (A′ . A . B′ . C ...) (Nr. 113); folglich bilden die von O_1 ausgehenden Strahlen ebenfalls Paare einer Involution. Man sagt in diesem Falle:

Die beiden projectivischen Reihen von Kegelschnittpunkten A B C ... und A′B′C′ ... bilden eine Involution, oder man hat auf dem Kegelschnitte eine von den Paaren conjugirter Punkte A A′, B B′, C C′ ... gebildete Involution *).

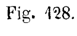
I. Hat man, wie oben, eine Involution von Punkten auf einer Geraden *o* mit einem, *o* berührenden, Kegelschnitt und zieht man durch die Paare der conjugirten Punkte die Tangentenpaare *a a′*, *b b′*, *c c′* ... an den Kegelschnitt, so werden diese Tangenten *a a′*, *b b′*, ... von jeder anderen Tangente an denselben Kegelschnitt in Punkten einer Involution geschnitten; man wird dann sagen, dass *a a′*, *b b′*, *c c′* ... eine Involution von Tangenten an den Kegelschnitt ist (Vergl. Nr. 158).

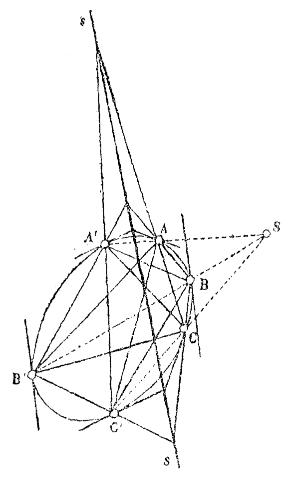
II. Wenn mehrere Paare von Tangenten *a a′*, *b b′*, *c c′*, ... an einen Kegelschnitt eine Involution bilden, so bilden auch ihre Berührungspunkte A A′, B B′, C C′, ... eine Involution, und umgekehrt (158, VI).

160. Von den sechs beliebigen Punkten A, B, C, A′, B′, C′ eines Kegelschnittes, die wir in Nr. 157 erhielten, soll nun C′ unendlich nahe an A und C unendlich nahe an A′ liegen. Dann bilden die projectivischen Reihen (A B A′ ...) und (A′ B′ A ...) eine Involution (A A′ . B B′ ...) und das eingeschriebene Sechseck geht in diejenige Figur über, welche von dem eingeschriebenen

*) Staudt, Beiträge, Nr. 70 ff.

Viereck A B′A′B und von den Tangenten in den Gegenecken A und A′ (Fig. 106, 128) gebildet wird. Daraus folgt:


Fig. 128.



Zwei Punktenpaare (A A′), (B B′) eines Kegelschnittes bestimmen auf dieser Curve eine Involution.

I. Sollen andere conjugirte Punkte und die Doppelpunkte gefunden werden, so hat man nur die Gerade *s* zu construiren, welche den Schnittpunkt von A B′ und A′ B mit dem Schnittpunkt von A B und A′ B′ verbindet; d. h. die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks A B′ A′ B zu ziehen. Die gemeinsamen Punkte von *s* und dem Kegelschnitt sind die Doppelpunkte. Zwei conjugirte Punkte C und C′ liegen so, dass sich die Geraden A C und A′ C′ (oder A C′ und A′ C oder B C und B′ C′ oder B′ C und B C′) auf *s* schneiden.

II. Die Tangenten in zwei conjugirten Punkten, wie A A′, B B′,... schneiden sich ebenfalls immer auf der Geraden *s* (Nr. 129).

III. Da sich die Seitenpaare B C und B′ C′, C A und C′ A′, A B und A′ B′ in drei Punkten derselben Geraden *s*

schneiden, so sind die Dreiecke A B C und A' B' C' collinear (14) *), folglich laufen die Geraden A A', B B', C C' in einem Punkte S zusammen. Die Geraden A A' und B B' genügen, um diesen Punkt zu bestimmen; daraus folgt:

Zwei beliebige conjugirte Punkte der Involution liegen stets mit einem festen Punkte S auf derselben Geraden.

Oder auch:

Jede durch S gehende Sekante des Kegelschnittes gibt zwei conjugirte Punkte der Involution.

IV. Wir haben gesehen, dass wenn *s* mit dem Kegelschnitte zwei Punkte M und N gemein hat, diese Punkte die Doppelpunkte der Involution sind; also treffen sich auch die Tangenten in M und N im Punkte S.

V. Umgekehrt, bilden die Punktenpaare, in welchen ein Kegelschnitt von den Strahlen eines Büschels, dessen Centrum S kein Punkt der Curve ist, geschnitten wird, eine Involution. Denn, sind (A A') und (B B') die Schnittpunkte der Curve und zweier Strahlen, so bestimmen diese beiden Paare A A' und B B' eine Involution, in welcher stets zwei entsprechende Punkte mit einem festen Punkte, nämlich mit S, in gerader Linie sind. Hat die Involution Doppelpunkte, so sind es die Durchschnitte des Kegelschnittes mit der Geraden *s*, welche den Schnittpunkt von A B und A' B' und denjenigen von A B' und A' B enthält.

VI. Zieht man aus den verschiedenen Punkten einer Geraden *s* die Tangentenpaare *a a'*, *b b'*, *c c'*... an den Kegelschnitt, so bilden diese Geraden eine Involution. Denn, sind A A', B B', C C'... die Berührungspunkte der Geraden *a a'*, *b b'*, *c c'*... und S der Schnittpunkt der Sehnen A A' und B B', so liegen in der durch die Paare A A' und B B' bestimmten Involution irgend zwei andere conjugirte Punkte in derselben Geraden mit S. Der Punkt C und sein conjugirter liegen also auf einer durch S gehenden Geraden und die Tangenten in diesen Punkten müssen sich

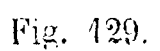
*) Auch die Dreiecke A' B C und A B' C, A B' C und A' B C', A B C' und A' B' C sind collinear.

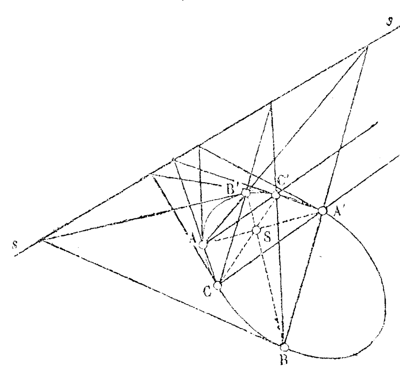
auf der Geraden schneiden, welche durch die Schnittpunkte von aa' und bb' geht, d. h. auf s; der conjugirte Punkt zu C ist also C′. Damit ist gezeigt, dass AA′, BB′, CC′ Punktenpaare einer Involution und dass folglich aa', bb', cc' Tangentenpaare einer Involution sind (159, II).

VII. Sind M und N die Doppelpunkte einer Involution AA′, BB′, CC′... von Kegelschnittpunkten, so haben wir gesehen, dass AB, A′B′, MN drei Geraden sind, die in einem Punkte zusammenlaufen (ebenso verhält es sich mit A′B, AB′, MN). Also können wir nach dem Satze Nr. 160, V schliessen:

Sind AA′ und BB′ zwei Paare conjugirter Elemente und MN die Doppelelemente einer Involution, so sind MN, AB und A′B′ (ebenso MN, AB′ und A′B) drei Paare conjugirter Elemente einer neuen Involution.

VIII. Die Gerade s schneidet den Kegelschnitt, wenn (188) der Punkt S ausserhalb liegt (Fig. 128), d. h. wenn das eine von den beiden Paaren AA′ und BB′ ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des andern liegt; ist das eine


Fig. 129.



Paar durch das andere getrennt (reicht es in das andere hinein), so liegt der Punkt S innerhalb und die Gerade s trifft den Kegelschnitt gar nicht (Fig. 129). Wir finden also neuerdings die Eigenschaft (98):

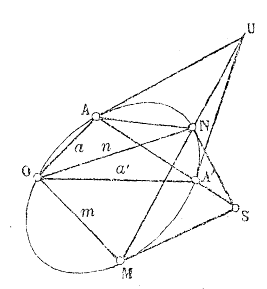
Eine Involution hat zwei Doppelelemente, wenn von zwei Paaren conjugirter Elemente das eine ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des andern liegt.

Eine Involution hat keine Doppelelemente, wenn von zwei Paaren conjugirter Elemente das eine das andere trennt.

Es kann niemals vorkommen, dass eine eigentliche Involution ein einziges Doppelelement hat. Denn, wäre s eine Tangente an den Kegelschnitt, so wäre S der Berührungspunkt; in jedem Paar conjugirter Punkte wäre einer mit S zusammenfallend (Vergl. Nr. 96).

161. Sind (M N A B...) und (M N A′ B′...) zwei projectivische Reihen von Kegelschnittpunkten, so werden M und N die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte sein und die Gerade M N wird den Schnittpunkt von A B′ und A′ B enthalten (Nr. 157). Nehmen wir jetzt an, dass B′ unendlich nahe an A rücke und das nämliche auch mit den Punkten B und A′ geschehe, so dass die Grenzlagen der Geraden A B′ und A′ B die Tangenten in A und A′ werden (Fig. 130). Sind nun aber M N A A′ und M N A′ A entsprechende Grup-

Fig. 130.



pen von zwei projectivischen Reihen, so ist damit auch gesagt, dass, wenn man diese Punkte aus einem beliebigen Punkte O des Kegelschnitts projicirt, die beiden Gruppen projicirender Strahlen $m\,n\,a\,a'$ und $m\,n\,a'\,a$ projectivisch sind; also ist die Gruppe $m\,n\,a\,a'$ harmonisch (65). So gelangen wir neuerdings zu dem Lehrsatze von Nr. 152, II (rechts):

Sind vier Punkte M N A A′ eines Kegelschnittes harmonisch, so schneiden sich die Tangenten in

zwei conjugirten Punkten, z. B. A und A′ auf der Verbindungslinie der beiden andern. Oder (152, II, links):

Sind vier Tangenten eines Kegelschnittes harmonisch, so schneiden sich zwei conjugirte Tangenten auf der Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden andern.

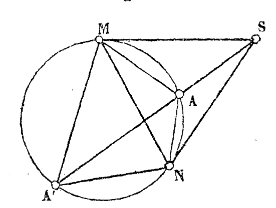
Daraus folgt: Zieht man durch den Schnittpunkt S der Tangenten in M und N gerade Linien, welche den Kegelschnitt in (A, A′), (B, B′), (C, C′)... durchschneiden, so sind alle diese Punktenpaare durch M und N harmonisch getrennt. Die Tangentenpaare in A und A′, B und B′, C und C′,... schneiden sich also auf der Geraden M N.

Mit andern Worten:

Zieht man aus einem Punkte zwei Tangenten und eine Sekante an einen Kegelschnitt, so bilden die beiden Berührungspunkte und die beiden Schnittpunkte eine harmonische Gruppe.

Die Punkte (A A′), (B B′), (C C′)... bilden eine Involution, deren Doppelpunkte M und N sind (160, III, IV). Wir kommen also neuerdings zu der Eigenschaft: wenn eine In-

Fig. 131.



volution zwei Doppelelemente hat, so sind sie durch zwei beliebige conjugirte Elemente harmonisch getrennt (96).

Nehmen wir nun an, der Kegelschnitt sei ein Kreis (Fig. 131). Die ähnlichen Dreiecke S A M und S M A′ geben:

$$AM : MA' = SM : SA'$$

und die ähnlichen Dreiecke S A N und S N A′:

$$AN : NA' = SN : SA';$$

da aber $SM = SN$, so wird

$$\frac{AM}{AN} = \frac{A'M}{A'N}$$

oder

$$AM \,.\, A'N = AN \,.\, A'M.$$

In dem eingeschriebenen Viereck $AMA'N$ haben wir nach dem Ptolemäischen Satze *):

$$AA' \,.\, MN = AM \,.\, A'N + AN \,.\, A'M;$$

sind also die vier Eckpunkte des Sehnenvierecks harmonische Punkte, so hat man

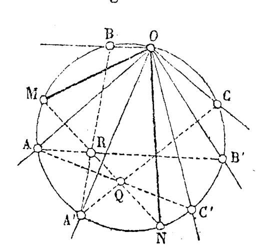
$$\tfrac{1}{2} AA' \,.\, MN = AM \,.\, A'N = AN \,.\, A'M.$$

162. Die in Nr. 157 ff. behandelten Eigenschaften dienen unmittelbar zur Lösung der Aufgabe:

Die entsprechend gemeinschaftlichen Elemente von zwei aufeinander liegenden projectivischen Gebilden und die Doppelelemente einer Involution zu construiren.

I. O sei der gemeinsame Mittelpunkt von zwei projectivischen Büscheln, die durch drei Paare entsprechender Strahlen bestimmt sind (Fig. 132). Wir beschreiben durch O einen Kreis; dieser wird die drei Paare der gegebenen Strahlen in (A, A′),

Fig. 132.



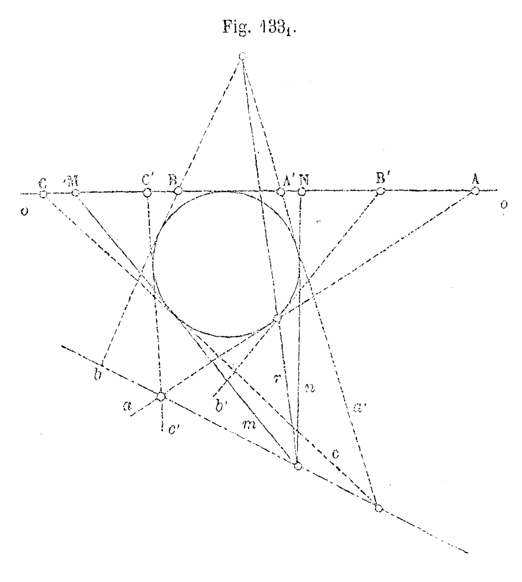
(B, B′) und (C, C′) schneiden. R sei der Schnittpunkt der Geraden AB' und $A'B$ und Q der Schnittpunkt von AC' und $A'C$. Schneidet QR den Kreis in zwei Punkten M und N, so werden OM und ON die gesuchten entsprechend gemeinschaftlichen Strahlen sein.

II. AA', BB', CC' mögen drei Paare entsprechender Punkte

*) Baltzer, Planimetrie, S. 119.

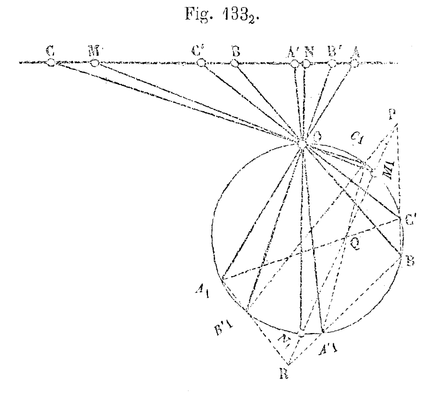
von zwei aufeinander liegenden projectivischen Punktreihen auf einer Geraden o sein (Fig. 133_1); es sollen die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte construirt werden.

Fig. 133_1.



Man beschreibe einen Kreis, der die Gerade o berührt und ziehe daran aus den gegebenen Punkten die Tangenten $a\,a'$, $b\,b'$,

Fig. 133_2.



$c\,c'$; die Verbindungslinie der Punkte $a\,b'$ und $a'\,b$ sei r, diejenige der Punkte $a\,c'$ und $a'\,c$ sei q. Liegt der Punkt $q\,r$ ausserhalb des Kreises und sind m und n die Tangenten aus diesem Punkte

an den Kreis, so werden *o m* und *o n* die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte der gegebenen Punktreihen sein.

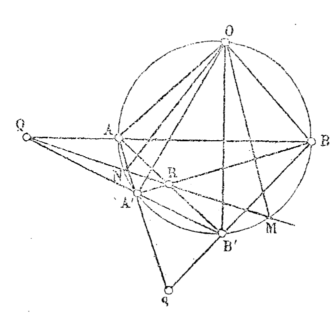
Oder auch (Fig. 133_2):

Wir projiciren aus einem Punkte O eines beliebig gezeichneten Kreises die gegebenen Punkte in $A_1\, A_1'$, $B_1\, B_1'$ $C_1\, C_1'$ der Peripherie. R sei der Schnittpunkt von $A_1\, B_1'$ und $A_1'\, B_1$ und Q derjenige von $A_1 C_1'$ und $A_1' C_1$ (oder auch P der Schnittpunkt von $B_1\, C_1'$ und $B_1'\, C_1$).

Schneidet die Gerade P Q R den Kreis in zwei Punkten M_1 und N_1 und projicirt man diese zwei Punkte aus dem Punkte O in M und N auf der gegebenen Geraden, so werden M und N die gesuchten entsprechend gemeinschaftlichen Punkte sein *).

III. Sind die beiden Büschel 162, I involutorisch, so werden sie durch zwei Paare conjugirter Strahlen bestimmt (Fig. 134). Wir legen durch O einen beliebigen Kreis, der die gegebenen Strahlen in den Punkten (A, A′), (B, B′) schneide. R sei der Schnittpunkt von A B′ und A′ B und Q derjenige von

Fig. 134.



A B und A′ B′. Schneidet die Gerade Q R den Kreis in zwei Punkten M und N, so werden O M und O N die Doppelstrahlen der Involution sein. Die Gerade Q R schneidet den Kreis nicht, wenn der Schnittpunkt S von A A′ und B B′ im Innern des Kreises liegt.

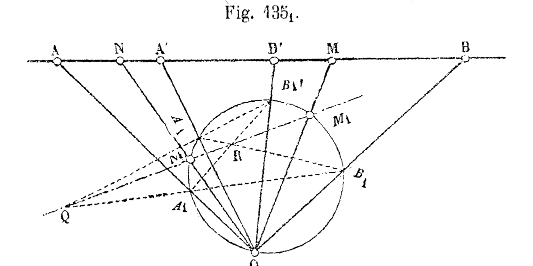
IV. Man sucht die Doppelpunkte einer Involution von Punkten einer Geraden; zwei Paare conjugirter Punkte seien A A′ und B B′ (Fig. 135_1).

Aus einem Punkte O eines beliebig gezeichneten Kreises

*) Steiner, loc. cit., S. 68 und 174. § 17 und 46.

projiciren wir die gegebenen Punkte in $A_1\,A_1'$, $B_1\,B_1'$ auf der Peripherie. R sei der Schnittpunkt von $A_1\,B_1'$ und $A_1'\,B_1$; Q sei der Schnittpunkt von $A_1\,B_1$ und $A_1'\,B_1'$. Schneidet die Ge-

Fig. 135_1.

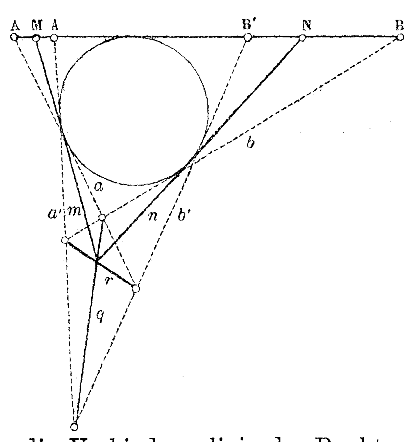


rade QR den Kreis in M_1 und N_1 und projicirt man M_1 und N_1 aus dem Punkte O nach M und N auf der gegebenen Geraden, so werden M und N die verlangten Doppelpunkte sein.

Oder auch:

Wir legen einen berührenden Kreis an die Gerade AB... (Fig. 135_2) und ziehen aus AA′ und BB′ die Tangenten $a\,a'$ und $b\,b'$ an diesen Kreis. Die Verbindungslinie der Punkte $a\,b$

Fig. 135_2.

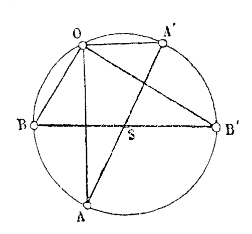


und $a'\,b'$ sei q, die Verbindungslinie der Punkte $a\,b'$ und $a'\,b$ sei r. Die Tangenten m und n aus dem Punkte $q\,r$ werden AB... in den verlangten Doppelpunkten schneiden.

163. Wenn in dem Fall (162, III) der Involution der Schnittpunkt S der Geraden AA′, BB′,.. Mittelpunkt des

Kreises ist (Fig. 136), d. h. wenn A A′, B B′,... eben so viele Durchmesser des Kreises sind, so wird jeder Strahl O A, O B,... auf dem conjugirten Strahl senkrecht stehen, mit

Fig. 136.

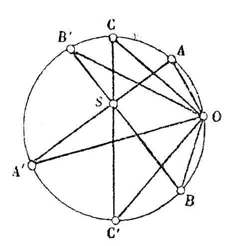


andern Worten: die Involution ist in diesem Falle von allen den rechten Winkeln gebildet, welche ihren Scheitel in O haben.

Ist aber S nicht Mittelpunkt des Kreises, so wird ein einziger Durchmesser durch diesen Punkt gehen; sind die Endpunkte dieses Durchmessers C und C′, so werden die Strahlen O C und O C′ aufeinander senkrecht stehen und zwar werden dieses die einzigen conjugirten Strahlen sein, welche diese Eigenschaft besitzen (Fig. 137). Oder auch:

Eine Involution von Strahlen ist entweder ausschliesslich von rechten Winkeln gebildet oder sie

Fig. 137.



enthält nur einen rechten Winkel, dessen Schenkel conjugirte Strahlen sind.

164. Dieser Lehrsatz ist nur ein besonderer Fall des folgenden:

Angenommen, wir haben zwei verschiedene Involutionen



von Strahlen, die alle im Punkte O zusammenlaufen und ein durch O beschriebener Kreis schneide die conjugirten Strahlen der ersten Involution in den Punktenpaaren (A A′. B B′...) und diejenigen der zweiten in (G G′. H H′...). Der Schnittpunkt von A A′ und B B′ sei S und derjenige von G G′ und H H′... sei T. Schneidet die Gerade S T den Kreis in zwei Punkten E und E′, so werden diese in beiden Involutionen conjugirte Punkte sein, denn sie liegen sowohl mit S als mit T auf derselben Geraden. Suchen wir jetzt die Fälle auf, in welchen die Gerade S T den Kreis schneiden wird.

Dieses Schneiden wird zunächst stattfinden, wenn wenigstens einer der Punkte S und T im Innern des Kreises ist (160, VIII), d. h. wenn wenigstens eine der Involutionen keine Doppelelemente hat (Fig. 138 und 139).

Sind beide Punkte S und T ausserhalb des Kreises, d. h. besitzen beide Involutionen Doppelelemente und sind O M

Fig. 138.

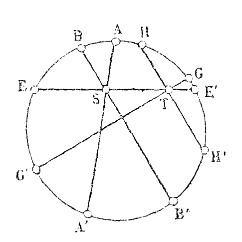
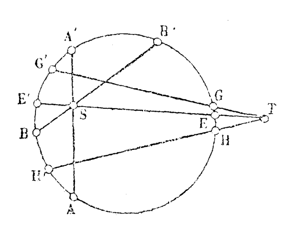


Fig. 139.



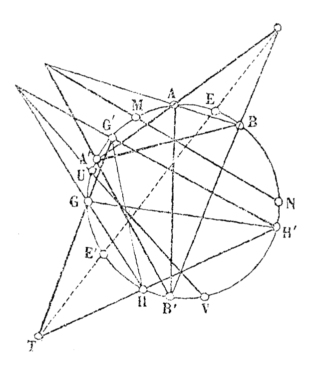
und O N diese Elemente in der ersten Involution und O U und O V in der zweiten, so müssen die Strahlen O E und O E′ sowohl das Paar O M und O N als auch das Paar O U und O V harmonisch trennen; damit aber (56) ein Elementenpaar O E und O E′ vorhanden sei, welches mit jedem der Paare O M und O N, O U und O V eine harmonische Gruppe bilde, ist es nothwendig und hinreichend, dass sich diese beiden Paare nicht theilweise decken; oder:

Zwei aufeinander liegende Involutionen (oder solche, die in demselben Gebilde der ersten Stufe enthalten sind) haben immer ein gemeinsames Paar conjugirter Elemente, nur in den Fällen nicht, wo die In-

volutionen Doppelelemente haben und wo die Doppelelemente der einen Involution durch diejenigen der andern getrennt sind.

Die Fig. 140 (ebenso die Fig. 138 und 139) zeigt uns den Fall von zwei Involutionen mit einem gemeinschaftlichen Paar conjugirter Elemente E und E′.

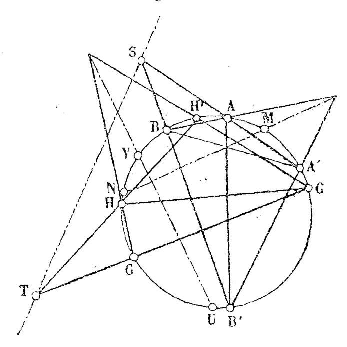
Fig. 140.



Die Fig. 141 dagegen illustrirt den Fall, wo dieses gemeinschaftliche Paar nicht vorhanden ist.

I. Die vorhergehende Aufgabe, mit welcher in zwei aufeinander liegenden Involutionen das gemeinschaftliche Paar conju-

Fig. 141.



girter Elemente construirt wurde, kommt auf folgende zurück: in einer Punktreihe, einem Büschel oder auf einem Kegelschnitt zwei Elemente zu bestimmen, welche mit jedem von zwei gegebenen Paaren ein harmonisches System bilden (56).

Handelt es sich z. B. um Punkte einer Geraden, so projiciren wir die gegebenen Paare aus einem Punkte O auf einen Kreis, der durch diesen Punkt geht. M, N und U, V sollen diese Projectionen sein (Fig. 140). Die Tangenten in M und N an den Kreis schneiden sich in S, die Tangenten in U und V schneiden sich in T. Ist das Paar M N nicht durch das Paar U V getrennt, so wird S T den Kreis in zwei Punkten E und E′ schneiden, deren Projectionen aus O die verlangten Punkte sind.

II. Die Doppelpunkte der durch die Paare A A′ und B B′ bestimmten Involution bilden das gemeinschaftliche Paar conjugirter Elemente von zwei andern Involutionen: die eine ist durch die Paare A B und A′B′, die andere durch die Paare A B′ und A′B bestimmt (160, VII).

Daraus ergibt sich eine Construction der Doppelpunkte der Involution, welche durch die Punktenpaare A A′ und B B′ einer Geraden bestimmt ist. Nehmen wir einen beliebigen Punkt G ausserhalb der Linie und beschreiben die Kreise G A B und G A′B′, so werden sie einen zweiten Schnittpunkt H haben. Der zweite Schnittpunkt der Kreise G A B′ und G A′B sei K. Jeder durch die Punkte G und H gezogene Kreis trifft die gegebene Gerade in zwei conjugirten Punkten der Involution A B . A′B′ (98); ebenso gibt jeder durch G K gezogene Kreis zwei conjugirte Punkte der Involution A B′ . A′B. Zieht man also den Kreis G H K und trifft derselbe die gegebene Gerade, so werden die beiden Schnittpunkte die Doppelelemente der Involution A A′ . B B′ sein *).

165. Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die Bestimmung der entsprechend gemeinschaftlichen Punkte zweier projectivischer Reihen von Kegelschnittpunkten A B C ... und A′B′C′ ... (und folglich der entsprechend gemeinschaftlichen Elemente von zwei beliebigen aufeinander liegenden projectivischen Gebilden) auf die Construction der Geraden *s* herauskommt, auf welcher sich die Linienpaare A B′ und A′B, A C′ und A′C, B C′ und B′C, ... schneiden. Ebenso kommt die Bestimmung der Doppelpunkte einer Involution A A′, B B′, .. auf die Construction der Geraden *s* heraus, auf welcher sich die Linienpaare A B und A′B′, A B′ und A′B, ... oder die Tangentenpaare in A und A′, B und B′... schneiden.

---

*) Chasles, Géometrie supérieure, Nr. 263.

Gibt man, umgekehrt, eine beliebige Gerade s (die nicht Tangente an den Kegelschnitt ist), so ist mit ihr eine Involution von Kegelschnittpunkten bestimmt; denn man hat nur aus den verschiedenen Punkten von s die Tangentenpaare an den Kegelschnitt zu legen, so bilden deren Berührungspunkte die Paare conjugirter Punkte.

Sollen aber zwei projectivische Reihen ABC... und A′B′C′... bestimmt werden, so muss ausser der Geraden s ein Paar entsprechender Punkte A A′ gegeben sein; jeder Punkt von s gibt, mit A und A′ verbunden, zwei Geraden, welche den Kegelschnitt in zwei entsprechenden Punkten B′ und B treffen.

Zwei projectivische Reihen von Punkten bestimmen eine Involution; die beiden Reihen geben nämlich die Gerade s, welche die Involution bestimmt. Haben die beiden Reihen zwei entsprechend gemeinschaftliche Punkte, so sind diese Punkte auch die Doppelpunkte der Involution.

§ 19. **Aufgaben des zweiten Grades.**

166. Aufgabe. Fünf Punkte O, O′, A, B, C eines Kegelschnittes sind gegeben; man soll die Schnittpunkte dieser Curve

Fig. 142.

Fünf Tangenten o, o', a, b, c eines Kegelschnittes sind gegeben; man soll die Tangenten suchen, die man aus einem ge-

Fig. 143.

mit einer gegebenen Geraden s bestimmen.

Auflösung. Aus O und O′ projiciren wir (Fig. 142) die übrigen Punkte A, B und C des Kegelschnittes; die Büschel O (A B C . . .) und O′ (A B C . . .) sind projectivisch und schneiden die Transversale s in Punkten, die zwei aufeinander liegende projectivische Punktreihen bilden.

Ist M ein entsprechend gemeinschaftlicher Punkt dieser Punktreihen, so wird M auch ein Punkt des Kegelschnittes sein, denn zwei entsprechende Strahlen der beiden Büschel schneiden sich in M. Die Schnittpunkte des Kegelschnittes und der Geraden s sind also nichts anderes als die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte der beiden aufeinander liegenden Punktreihen, welche im Durchschnitt der Geraden s mit den drei Paaren entsprechender Strahlen O A und O′A, O B und O′B, O C und O′C liegen. Möglicherweise gibt es zwei entsprechend gemeinschaftliche Punkte, oder einen einzigen oder gar keinen; die Gerade s kann also den Kegelschnitt in zwei Punkten treffen oder ihn in einem Punkte berühren oder gar nicht mit ihm zusammentreffen. Was nun die Construction der entsprechend gemeinschaftlichen

gebenen Punkte S an den Kegelschnitt legen kann.

Schneidet man die Tangenten a, b, c . . . durch die Geraden o, o' (Fig. 143), so sind die Punktreihen o (a, b, c,. . .) und o' (a, b, c,. . .) projectivisch und projicirt man sie aus dem Centrum S, so erhält man zwei concentrische projectivische Strahlenbüschel.

Ist m ein entsprechend gemeinschaftlicher Strahl dieser Büschel, so wird m eine Tangente an den Kegelschnitt sein, denn zwei entsprechende Punkte der beiden Punktreihen o und o' fallen auf diese Gerade m. Die durch S gehenden Tangenten des Kegelschnittes sind also nichts anderes als entsprechend gemeinschaftliche Strahlen der beiden concentrischen Strahlenbüschel, die durch diejenigen Strahlen bestimmt sind, welche die drei Paare entsprechender Punkte $o\,a$ und $o'\,a$, $o\,b$ und $o'\,b$, $o\,c$ und $o'\,c$ aus dem Centrum S projiciren. Möglicherweise gibt es zwei entsprechend gemeinschaftliche Strahlen oder einen einzigen oder gar keinen; man kann also aus dem Punkte S entweder zwei Tangenten ziehen, oder S ist ein Punkt der Curve, oder man kann aus S gar keine Tangente ziehen. Was nun die Construction der entspre-

Punkte anbetrifft, so verweisen wir auf Nr. 162, II.

Die Aufgabe wird ebenso gelöst, wenn vier Punkte O, O′, A und B des Kegelschnittes und die Tangente o in O oder drei Punkte O, O′ und A und die Tangenten o und o' in O und O′ gegeben sind. Im ersten dieser Fälle sind die Büschel durch die drei Strahlenpaare o und O′O, OA und O′A, OB und O′B, im zweiten Fall durch die drei Paare o und O′O, OO′ und o', OA und O′A bestimmt.

Gibt man aber fünf Tangenten oder vier Tangenten und einen ihrer Berührungspunkte oder drei Tangenten und zwei ihrer Berührungspunkte, so kann man zuerst die übrigen Berührungspunkte construiren (134, 140, 141); dann kommt die Aufgabe auf einen der obigen Fälle zurück.

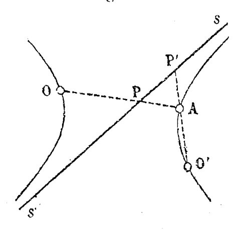
chend gemeinschaftlichen Strahlen anbetrifft, so verweisen wir auf Nr. 162.

Die Aufgabe wird ebenso gelöst, wenn vier Tangenten o, o', a und b des Kegelschnittes und der Berührungspunkt O von o oder drei Tangenten o, o', a und die Berührungspunkte O und O′ von o und o' gegeben sind. Im ersten dieser Fälle sind die Punktreihen durch die drei Punktenpaare O und $o'o$, oa und $o'a$, ob und $o'b$, im zweiten Fall durch die drei Paare O und $o'o$, oo' und O′, oa und $o'a$ bestimmt.

Gibt man aber fünf Punkte oder vier Punkte und die Tangente in einem derselben oder drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben, so kann man zuerst (128, 134, 138) die Tangenten in den übrigen gegebenen Punkten construiren; dann kommt die Aufgabe auf einen der obigen Fälle zurück.

167. Nehmen wir in der Construction der vorhergehenden Nummer (links) an, es sei der Kegelschnitt eine Hyperbel und

Fig. 144.



die Transversale s eine Asymptote (Fig. 144). In diesem Falle werden die auf s durch die Büschel O (A, B, C, ...) und O′ (A, B, C, ...)

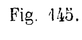
bezeichneten aufeinander liegenden Punktreihen einen entsprechend gemeinschaftlichen Punkt haben und dieser wird unendlich ferne liegen (es ist der Berührungspunkt der Hyperbel und der Asymptote s); da aber in zwei aufeinander liegenden Punktreihen (77), deren entsprechend gemeinschaftliche Punkte in einen einzigen unendlich fernen zusammenfallen, die zwischen zwei beliebigen entsprechenden Punkten liegende Strecke von constanter Länge ist, so ergibt sich der Satz:

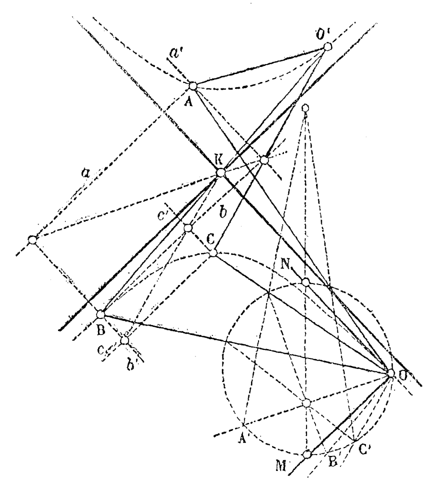
Drehen sich um zwei feste Punkte O und O′ einer Hyperbel zwei Strahlen, die sich stets auf der Curve schneiden, so hat die zwischen diesen Strahlen liegende Strecke PP′ auf einer Asymptote eine constante Länge *).

168. Nimmt man in Nr. 166 links an, es sei die Gerade s unendlich ferne, so wird die Aufgabe zur folgenden:

Fünf Punkte O, O′, A, B, C eines Kegelschnittes sind gegeben; man soll die unendlich fernen Punkte bestimmen (Fig. 145).

Betrachten wir wieder die projectivischen Büschel O (A, B, C, ...)


Fig. 145.



und O′ (A, B, C, ...), welche auf der unendlich fernen Geraden s zwei aufeinander liegende Punktreihen bezeichnen, deren ent-

*) Brianchon, loc. cit., S. 36.

sprechend gemeinschaftliche Punkte die verlangten Punkte sind und beachten wir, dass jeder dieser entsprechend gemeinschaftlichen Punkte sowohl auf der unendlich fernen Geraden *s* als auf zwei entsprechenden Strahlen der beiden Büschel liegen muss, diese Strahlen also parallel sind, so vereinfacht sich die Aufgabe dahin, in den beiden Büscheln die Paare der parallelen entsprechenden Strahlen zu finden.

Zur Auflösung ziehen wir durch O die Geraden O A′, O B′, O C′ resp. parallel O′ A, O′ B und O′ C; nun construiren wir (162) die entsprechend gemeinschaftlichen Strahlen der beiden concentrischen Büschel, welche durch die Paare O A und O A′, O B und O B′, O C und O C′ bestimmt sind. Gibt es zwei entsprechend gemeinschaftliche Strahlen O M und O N, so ist der durch die fünf gegebenen Punkte bestimmte Kegelschnitt eine Hyperbel, deren unendlich ferne Punkte auf den Richtungen O M und O N liegen oder, was auf dasselbe herauskommt, deren Asymptoten den Geraden O M und O N parallel sind.

Gibt es nur einen einzigen entsprechend gemeinschaftlichen Strahl O M, so ist der durch die fünf gegebenen Punkte bestimmte Kegelschnitt eine Parabel, deren unendlich ferner Punkt in der Richtung O M liegt.

Gibt es gar keinen entsprechend gemeinschaftlichen Strahl, so ist der durch die fünf gegebenen Punkte bestimmte Kegelschnitt eine Ellipse, weil er mit der unendlich fernen Geraden keinen Punkt gemein hat.

Will man im ersten Fall (Fig. 145) die Asymptoten der Hyperbel selbst construiren, so betrachte man letztere nur, als sei sie durch die beiden unendlich fernen Punkte und drei andere Punkte, z. B. A, B, C bestimmt; man nehme mit andern Worten an, die Hyperbel werde durch die beiden projectivischen Büschel erzeugt, in denen die einen Strahlen parallel O M, die andern parallel O N sind und von denen zwei entsprechende durch A, zwei andere entsprechende durch B und die letzten zwei durch C gehen. Diejenigen Strahlen dieser Büschel, welche der unendlich fernen Geraden (der Verbindungslinie der Centren der Büschel) entsprechen, werden die verlangten Asymptoten sein.

Nennen wir also (Fig. 145) *a*, *b*, *c* die durch A, B, C gehenden Strahlen, die parallel O M sind und *a′*, *b′*, *c′* die durch A, B, C gehenden und O N parallelen Strahlen; verbinden wir dann Punkt *a b′* mit *a′ b* und Punkt *b c′* mit Punkt *b′ c*; der Schnittpunkt

dieser Linien sei K. Die durch den Punkt K gezogenen Parallelen zu O M und O N sind die gesuchten Asymptoten.

169. Die Aufgabe: „Durch einen Punkt S die Tangenten an den Kegelschnitt zu legen, von welchem fünf Punkte A, B, C, D, E gegeben sind,“ kann ebenfalls an die Aufgabe von Nr. 166 links geknüpft werden, indem man die Eigenschaften der Involution benützt (Nr. 160), welche man erhält, indem man den Kegelschnitt durch Transversalen aus dem Punkte S schneidet.

Ziehen wir die Geraden S A und S B (Fig. 146), welche den Kegelschnitt in zwei neuen Punkten A′ und B′ treffen, die man

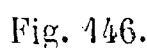
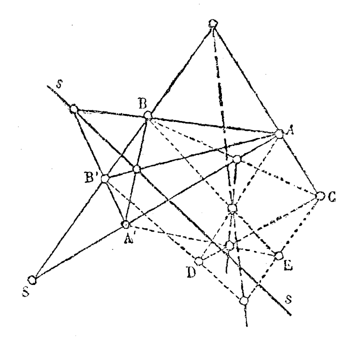
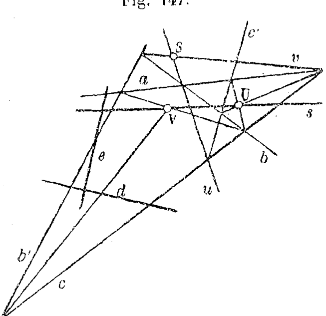


Fig. 146.



construiren kann (nur mit Hülfe des Lineals und ohne die Curve zu ziehen), indem man den Pascal'schen Satz (Nr. 124, rechts)

Fig. 147.



anwendet. Die Punkte A′ und B′ wurden in der Figur mit Hülfe der Sechsecke A D C B E A′ und B E C A D B′ construirt. Verbinden wir jetzt den Schnittpunkt von A B und A′ B′ mit demjenigen von A B′ und A′ B, so wird diese Gerade *s* (160) die Be-

rührungspunkte der von S ausgehenden Tangenten enthalten. Die Frage vereinfacht sich also dahin, die Durchschnittspunkte des Kegelschnittes und der Geraden s zu finden (Nr. 166, links).

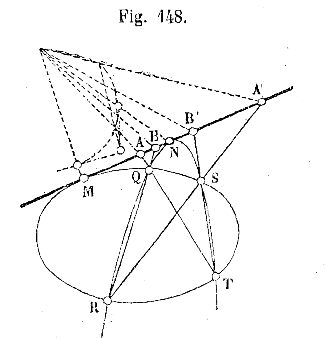
Wir überlassen dem Studirenden die Mühe, die verwandte Construction (Fig. 147) zu machen, um folgende Aufgabe auf diejenige von Nr. 166 rechts zurückzuführen:

Die Schnittpunkte einer gegebenen Geraden s und eines Kegelschnittes zu finden, der durch fünf gegebene Tangenten bestimmt ist.

170. Aufgabe. Einen Kegelschnitt zu construiren, der durch vier gegebene Punkte Q, R, S, T geht und eine gegebene Gerade s (die durch keinen der gegebenen Punkte geht) berührt.

Auflösung. Die Seiten Q T, R S, Q R, S T des Vierecks Q R S T schneiden s in A, A′, B, B′ (Fig. 148); wir construiren die Doppelpunkte der durch die Paare A A′, B B′ bestimmten Involution (Nr. 143).

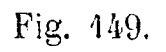
Fig. 148.

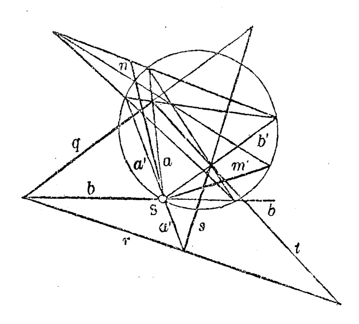


Gibt es zwei Doppelpunkte, M und N, so wird jeder derselben (Nr. 145 links) ein Berührungspunkt von s mit einem

Einen Kegelschnitt zu construiren, der vier gegebene Geraden q, r, s, t berührt und durch einen gegebenen Punkt S geht (der auf keiner der gegebenen Geraden liegt).

Auflösung. Aus dem Centrum S projiciren wir die Punkte qt, rs, qr, st des Vierseits $qrst$ mit Hülfe der Strahlen a, a', b, b' (Fig. 149) und construiren die Doppelstrahlen der durch die Paare $a\,a'$, $b\,b'$ bestimmten Involution.


Fig. 149.



Gibt es zwei Doppelstrahlen m und n, so wird jeder derselben (Nr. 145 rechts) in S Tangente an den dem Vierseit $qrst$

der um das Viereck Q R S T beschriebenen Kegelschnitte sein; die Aufgabe ist also mit jedem der Kegelschnitte QRSTM und QRSTN gelöst, die man beide punktweise mit Hülfe des Pascal'schen Satzes (Nr. 124 rechts) verzeichnen kann.

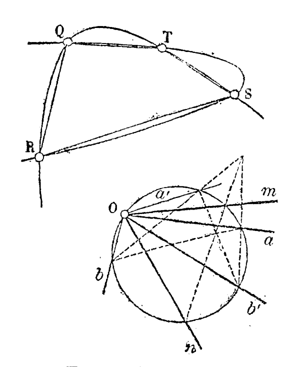
Gibt es aber keine Doppelpunkte, so gibt es auch keine Kegelschnitte, die den gegebenen Bedingungen genügen.

eingeschriebenen Kegelschnitt sein; die Aufgabe ist also mit jedem der Kegelschnitte $qrstm$ und $qrstn$ gelöst, die man beide mit Hülfe weiterer Tangenten und mit Anwendung des Satzes von Brianchon (Nr. 124 links) zeichnen kann.

Gibt es keine Doppelstrahlen, so gibt es auch keine Kegelschnitte, die den gegebenen Bedingungen genügen.

I. Nimmt man (in voriger Aufgabe links) an, es sei die Gerade s unendlich ferne, so wird die Aufgabe zur folgenden: **Eine Parabel zu construiren, die durch vier Punkte Q, R, S, T geht.** Aus einem beliebigen Centrum O (Fig. 150) ziehen wir die Strahlen a, a', b, b' bezüglich parallel den Geraden QT, RS, QR,

Fig. 150.



S T und construiren die Doppelstrahlen der durch die Paare aa', bb' bestimmten Involution. Ergeben sich Doppelstrahlen, so zeigt jeder von ihnen die Richtung an, in welcher der unendlich ferne Punkt einer Parabel liegt, die durch die vier gegebenen Punkte geht; so wird die Aufgabe auf die letzte von Nr. 128 zurückgeführt.

Durch vier gegebene Punkte können also entweder zwei oder gar keine Parabeln gelegt werden; im ersten Fall sind die übrigen umschriebenen Kegelschnitte Ellipsen und Hyperbeln; im zweiten Fall sind es nur Hyperbeln. Der erste Fall tritt ein,

wenn jeder der vier Punkte ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks liegt; man hat aber den zweiten Fall, wenn einer der vier Punkte im Innern des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist.

II. Ist in der Aufgabe rechts eine der Geraden $q\,r\,s\,t$ in unendlicher Ferne, so wird die Aufgabe zur folgenden:

Eine Parabel zu construiren, welche drei gegebene Geraden berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

171. Aufgabe. Einen Kegelschnitt zu construiren, der durch drei gegebene Punkte P, P′, P″ geht und zwei gegebene Geraden q und s (die durch keinen der Punkte P, P′, P″ gehen) berührt.

Einen Kegelschnitt zu construiren, der drei gegebene Geraden p, p', p'' berührt und durch zwei gegebene Punkte Q und S geht (die nicht auf den gegebenen Geraden liegen).

Fig. 151.

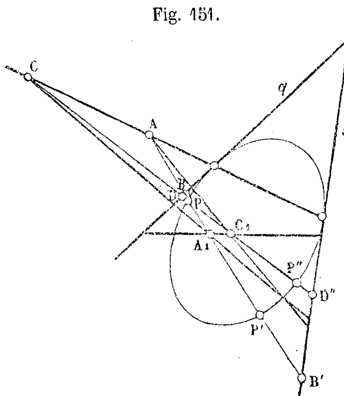
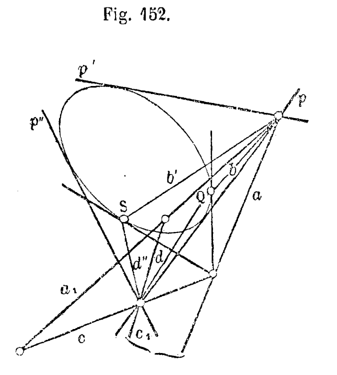


Fig. 152.



Die Auflösung ist auf den Satz Nr. 149 links gestützt. Stellen wir uns vor, der Kegelschnitt und das Tangentenpaar q und s werden von der Transversalen P P′ in den Punktenpaaren P P′ und B B′ (Fig. 151) geschnitten. Sind dann A und A_1 die Doppelpunkte der durch diese beiden Punktenpaare bestimmten In-

Die Auflösung ist auf den Satz Nr. 149 rechts gestüzt. Stellen wir uns vor, man habe aus dem Punkte $p\,p'$ die Tangenten p und p' an den Kegelschnitt und die Strahlen b und b' nach den Punkten Q und S gelegt (Fig. 152). Sind dann $a\,a_1$ die Doppelstrahlen der durch die beiden Paare $p\,p'$ und $b\,b'$ be-

volution, so muss nach jenem Lehrsatze die Berührungssehne des Kegelschnittes und der Tangenten q, s durch einen dieser Punkte gehen. Wiederholen wir denselben Schluss für die Transversale PP'', welche q und s in D und D'' schneidet, d. h. construiren wir auch die Doppelpunkte C und C_1 der durch die Paare PP'' und DD'' bestimmten Involution, so wird die Berührungssehne durch C oder durch C_1 gehen müssen. Die Aufgabe lässt also vier Auflösungen zu, d. h. wenn die beiden Involutionen (PP'. BB') und (PP''. DD'') die Doppelpunkte (A, A_1) und (C, C_1) besitzen, so gibt es vier Kegelschnitte, die den gegebenen Bedingungen entsprechen. Die Berührungssehnen dieser Curven mit den Tangenten q und s sind AC, A_1C, AC_1 und $A_1 C_1$. Von jedem dieser Kegelschnitte kennt man fünf Punkte: P, P', P'' und vom ersten z. B. die Schnittpunkte von AC mit q und s; man kann sie also mit Hülfe des Pascalschen Satzes (Nr. 124, rechts) punktweise verzeichnen.

stimmten Involution, so muss nach jenem Lehrsatze der Schnittpunkt der Tangenten in den Punkten Q und S des Kegelschnittes auf einem dieser Strahlen liegen. Wiederholen wir denselben Schluss für den Punkt pp'', aus welchem wir die Strahlen d und d'' nach den Punkten Q und S ziehen, d. h. construiren wir auch die Doppelstrahlen c und c_1 der durch die Paare pp'' und dd'' bestimmten Involution, so wird der Tangentenschnittpunkt auf c oder c_1 fallen. Die Aufgabe lässt also vier Auflösungen zu, d. h. besitzen die beiden Involutionen $(pp' . bb')$ und $(pp'' . dd'')$ die Doppelstrahlen (aa_1) und (cc_1), so gibt es vier Kegelschnitte, die den gegebenen Bedingungen entsprechen. Die Schnittpunkte der Tangenten in Q und S sind für diese Curven ac, a_1c, ac_1, a_1c_1. Von jeder dieser Curven kennt man fünf Tangenten, von der ersten z. B. p, p', p'' und die Geraden, welche ac mit Q und S verbinden; man kann sie also mit Hülfe weiterer Tangenten und Benützung des Lehrsatzes von Brianchon (Nr. 124 links) verzeichnen.

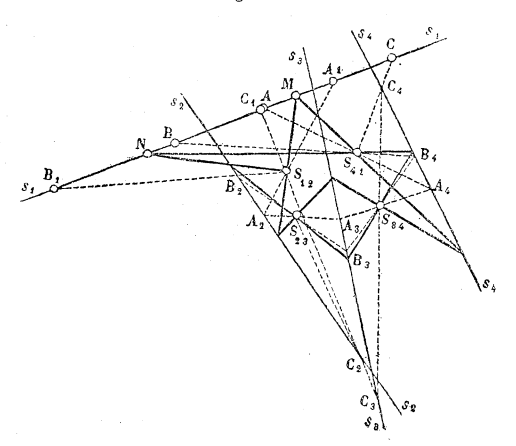
172. Aufgabe. Ein Polygon zu construiren, dessen Eckpunkte auf gegebene Gerade fallen und dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen *).

---

*) Poncelet, loc. cit., S. 345.

Auflösung. Um ein Beispiel zu entwickeln, nehmen wir an, es handle sich darum, ein einfaches Vierseit zu construiren, dessen Eckpunkte 1, 2, 3, 4 bezüglich auf die gegebenen Geraden s_1, s_2, s_3 und s_4 fallen und dessen Seiten 12, 23, 34, 41 durch die gegebenen Punkte S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41} gehen. Wir projiciren aus dem Centrum S_{12} die beliebig gewählten Punkte A_1, B_1, $C_1 \ldots$ von s_1 auf s_2 in A_2, B_2, $C_2 \ldots$, dann projiciren wir aus dem Centrum S_{23} die Punktreihe $A_2 B_2 C_2$ auf s_3 in $A_3 B_3 C_3 \ldots$; wir projiciren weiter aus S_{34} die Punkte $A_3 B_3 C_3 \ldots$ in $A_4 B_4 C_4 \ldots$ auf s_4; endlich projiciren wir auch aus S_{41} die Punkte $A_4 B_4 C_4 \ldots$ in $A B C \ldots$ auf s_1. Bei dieser Construction sind die Punkte S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41} die Centren von vier projectivischen Büscheln; denn der erste ist perspectivisch zum zweiten (der gemeinsame Schnitt ist s_2), ebenso der zweite zum dritten (der gemeinsame

Fig. 153.



Schnitt ist s_3) und der dritte zum vierten (der gemeinsame Schnitt ist s_4). Daraus folgt (114), dass der Ort des Schnittpunktes zweier entsprechender Strahlen (wie $A_1 A_2$ und $A_4 A$) des ersten und vierten Büschels oder mit andern Worten, der Ort des ersten Eckpunktes desjenigen variabeln Vierseits, dessen zweiter, dritter und vierter Eckpunkt (A_2, A_3, A_4) auf drei gegebenen Geraden (s_2, s_3, s_4) hingleiten und dessen Seiten ($A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $A_4 A$) durch vier gegebene Punkte (S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41}) gehen, ein Kegelschnitt ist *).

*) Diesen Satz: „Verändert sich ein einfaches Polygon in der Weise,

Dieser Kegelschnitt geht durch die Punkte S_{12} und S_{41}, die Centren der ihn erzeugenden Büschel; um ihn also zu bestimmen, hat man nur noch drei weitere Punkte desselben nöthig; d. h. es genügen die Schnittpunkte der drei Paare entsprechender Strahlen $A_1 A_2$ und $A_4 A$, $B_1 B_2$ und $B_4 B$, $C_1 C_2$ und $C_4 C$. Man hat dann nur noch die Durchschnitte der Geraden s_1 mit dem durch diese fünf Punkte bestimmten Kegelschnitte (166) zu construiren, so kann jeder dieser Durchschnittspunkte M, N als erster Eckpunkt des gesuchten Vierseits genommen werden.

Dieselbe Construction kann aus einem anderen Gesichtspunkte betrachtet werden. Die gebrochenen Linien $A_1 A_2 A_3 A_4 A$, $B_1 B_2 B_3 B_4 B$ und $C_1 C_2 C_3 C_4 C$ können als Versuche angesehen werden, die gemacht worden sind, um das gesuchte Vierseit zu construiren; diese Versuche ergeben nicht geschlossene Polygone, denn der Punkt A fällt nicht mit A_1, B nicht mit B_1 und C nicht mit C_1 zusammen. Diese Versuche und alle ähnlichen denkbaren, die man noch machen könnte, die aber nicht nothwendig sind, ergeben auf der Geraden s_1 zwei Punktreihen $A_1 B_1 C_1 \ldots$, $A B C \ldots$ (die eine durch den Anfangspunkt, die andere durch den Endpunkt der gebrochenen Linie oder des offenen Polygons beschrieben). Diese beiden Punktreihen sind projectivisch, denn die zweite wird mit Hülfe von Projectionen aus den Centren S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41} und Schnitten durch die Transversalen s_2, s_3, s_4, s_1 aus der ersten abgeleitet. Jeder entsprechend gemeinschaftliche Punkt dieser Punktreihen löst die Aufgabe; denn legt man den Anfangspunkt der gebrochenen Linie in denselben, so fällt auch ihr Endpunkt darauf und das Polygon wird geschlossen sein.

In dieser Aufgabe, sowie in den folgenden bleibt die Methode dieselbe, welches auch die Seitenzahl des zu construirenden Polygons sei.

173. Aufgabe. In einen gegebenen Kegelschnitt *) ein Polygon zu beschreiben, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen.

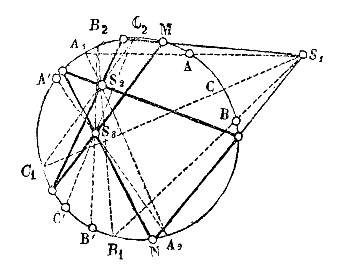
---

dass seine Seiten durch gegebene Punkte gehen und dass alle seine Eckpunkte, bis auf einen, auf gegebenen Geraden hingleiten, so durchläuft der letzte Eckpunkt einen Kegelschnitt," verdanken wir Maclaurin (Transactions of London 1735 oder Aperçu historique, S. 150).

*) Vollständig gezeichnet oder durch fünf gegebene Punkte bestimmt.

Auflösung. Wir nehmen an, es handle sich darum, ein Dreieck zu construiren, dessen Seiten beziehungsweise durch drei gegebene Punkte S_1, S_2, S_3 (Fig. 154) gehen. Machen wir drei Versuche, d. h. projiciren wir aus dem Centrum S_1 drei be-

Fig. 154.



liebige Punkte A, B, C der Curve in A_1, B_1, C_1 auf derselben Curve, hierauf A_1, B_1, C_1 aus dem Centrum S_2 in A_2, B_2, C_2, endlich A_2, B_2, C_2 aus dem Centrum S_3 in A', B', C' (immer auf derselben Curve). Da der Endpunkt A' oder B' oder C' nicht mit dem entsprechenden Ausgangspunkt A oder B oder C zusammenfällt, so bekommen wir statt eines eingeschriebenen Dreiecks, wie es in der Fassung der Aufgabe verlangt wird, ein offenes Polygon $A A_1 A_2 A'$, $B B_1 B_2 B'$, $C C_1 C_2 C'$; die Projectionen aber, die successive aus den Centren S_1, S_2, S_3 gemacht wurden, leiten aus der Reihe von Punkten A, B, C,... die Reihen A_1, B_1, C_1 ... A_2, B_2, C_2 ... und A', B', C' ... ab, folglich ist (158, 160) die Reihe A, B, C... der Ausgangspunkte projectivisch zu der Reihe der Endpunkte A', B', C',... (157). Die Aufgabe wäre gelöst, wenn der Ausgangspunkt mit dem Endpunkt zusammenfiele. Wenn also die beiden projectivischen Reihen $A B C$... und $A' B' C'$... entsprechend gemeinschaftliche Punkte haben, so kann jeder der erste Eckpunkt eines Dreiecks sein, das den gegebenen Bedingungen genügt. Man hat also nur noch die Gerade zu finden (157, II), auf welcher sich die Paare der Gegenseiten des eingeschriebenen Sechsecks $A B' C A' B C'$ schneiden und die Schnittpunkte M und N dieser Geraden mit dem Kegelschnitt (166) zu construiren; jeder wird eine Auflösung der Aufgabe liefern *).

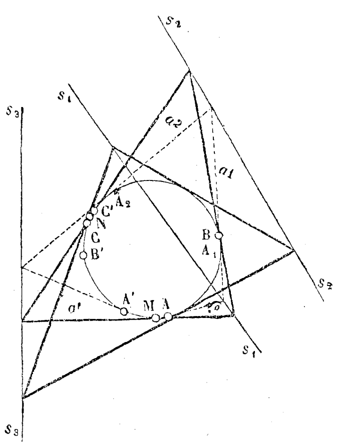
*) Poncelet, loc. cit., S. 352.

174. Eine entsprechende Methode gestattet die Auflösung der correlativen Aufgabe:

Einem gegebenen Kegelschnitt, der vollständig beschrieben oder durch fünf Tangenten bestimmt ist, ein Polygon zu umschreiben, dessen Eckpunkte auf gegebene Geraden fallen.

Nehmen wir an, es handle sich darum, einem Kegelschnitt ein Dreieck zu umschreiben, dessen Eckpunkte beziehungsweise auf den Geraden s_1, s_2, s_3 (Fig. 155) liegen. Ziehen wir die Tangente a in einem beliebigen Punkte A des Kegelschnittes; aus ihrem Schnittpunkt mit s_1 ziehen wir eine andere Tangente

Fig. 155.



a_1 (ihr Berührungspunkt ist A_1); aus dem Schnittpunkt von a_1 und s_2 ziehen wir die dritte Tangente a_2 (Berührungspunkt A_2); endlich aus dem Schnittpunkt von a_2 und s_3 ziehen wir noch die Tangente a' mit dem Berührungspunkt A'. Die Aufgabe wäre gelöst, fiele der Punkt A' auf A, d. h. wenn die Tangenten a und a' coincidirten. Stellen wir uns nun vor, dass wir noch andere ähnliche Versuche gemacht haben, indem wir beliebige Punkte B, C... des Kegelschnittes zu Ausgangspunkten wählten, so bekommen wir successive die Punktreihen A, B, C,... A_1, B_1, C_1,... A_2, B_2, C_2,... und A', B', C',... die alle zu einander projectivisch sind. Die erste Reihe ist nämlich zu der zweiten projectivisch (160), weil sich die Tangenten in A und A_1, B und B_1, C und C_1... immer auf s_1 schneiden; ebenso sind

die zweite und dritte, die dritte und vierte und folglich auch die erste und vierte Reihe aus demselben Grunde (158) projectivisch. Da aber die Aufgabe gelöst wäre, wenn A auf A′ oder B auf B′... fiele, so wird jeder entsprechend gemeinschaftliche Punkt der beiden projectivischen Reihen ABC... und A′B′C′... als Berührungspunkt der ersten Seite eines Dreiecks dienen können, das den gegebenen Bedingungen Genüge leistet. Man hat also nur drei Versuche zu machen (157), d. h. zu drei beliebigen Punkten A, B, C des Kegelschnittes die entsprechenden Punkte A′, B′, C′ zu suchen und die Durchschnitte M und N des Kegelschnittes mit derjenigen Geraden zu construiren, welche die Schnittpunkte der Gegenseiten des eingeschriebenen Sechsecks A B′ C A′ B C′ enthält *).

175. Der besondere Fall der Aufgabe Nr. 173, in welchem die festen Punkte S_1, S_2,... alle auf derselben Geraden *s* liegen, muss getrennt behandelt werden. Ist die Seitenzahl des gesuchten Polygons gerade, so wird der Satz von Nr. 146 verwendbar: in diesem Falle hat die Aufgabe entweder gar keine Auflösung oder sie hat deren unendlich viele. Handelt es sich z. B. darum, in den Kegelschnitt ein Achteck zu beschreiben, dessen sieben erste Seiten durch die Punkte S_1, S_2,.., S_7 gehen, so wird die letzte Seite dann, in Folge jenes Lehrsatzes, durch einen festen Punkt S von *s* gehen; der Punkt S ist aber nicht beliebig, sondern durch die Punkte S_1, S_2,... S_7 bestimmt. Coincidirt also der letzte Punkt S_8 mit S, so gibt es unendlich viele Achtecke, welche den gegebenen Bedingungen genügen. Findet diese Uebereinstimmung nicht statt, so gibt es gar keine Auflösung.

Ist die Seitenzahl des gesuchten Polygons ungerade, so wird die Aufgabe bestimmt. Nehmen wir an, es handle sich darum, ein Siebeneck einzubeschreiben (Fig. 114), dessen Seiten durch die gegebenen Punkte S_1, S_2, S_3 ... S_7 gehen, die alle in gerader Linie liegen. Nach dem Lehrsatz (146) gibt es unendlich viele Achtecke, deren sieben erste Seiten durch sieben gegebene Punkte einer Geraden und deren achte Seite durch einen festen Punkt S dieser Geraden geht. Hat es unter diesen Achtecken eines, dessen achte Seite eine Tangente an den Kegelschnitt ist, so wird die Aufgabe gelöst sein; denn dieses Polygon mit zwei un-

*) Poncelet, loc. cit., S. 354.

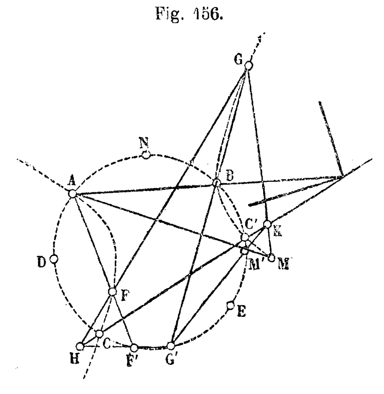
endlich nahe liegenden oder zusammenfallenden Eckpunkten wird zu einem eingeschriebenen Siebeneck, dessen Seiten durch sieben gegebene Punkte gehen. Kann man also durch den Punkt S Tangenten an den Kegelschnitt ziehen, so wird der Berührungspunkt einer jeden von ihnen eine Auflösung geben (146). Je nach der Lage des Punktes S zu der Curve gibt es also entweder zwei Auflösungen oder nur eine oder gar keine.

Die Fig. 116 bezieht sich auf den Fall dieser Aufgabe, wo es sich darum handelt, ein Dreieck einzubeschreiben *).

Der Studirende möge übungsweise die correlative Aufgabe lösen: einem Kegelschnitt ein Polygon zu umschreiben, dessen Eckpunkte auf gegebene Strahlen eines Büschels fallen. Auch diese Aufgabe ist entweder unbestimmt oder ohne Auflösung, wenn das Polygon von gerader Seitenzahl ist; sie ist bestimmt und vom zweiten Grade, wenn das Polygon von ungerader Seitenzahl ist (Fig. 115 und 117).

176. Hülfssatz: Schneiden sich zwei Kegelschnitte in den Punkten A, B, C und C′ und zieht man durch A und B zwei Geraden, die den ersten Kegelschnitt in F

Fig. 156.



und G, den zweiten in F′ und G′ treffen, so laufen die Sehnen FG und F′G′ in einem Punkte H der Geraden CC′ (Fig. 156) zusammen.

Die Transversale CC′ trifft nämlich den ersten Kegelschnitt und die Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks ABGF in sechs Punkten einer Involution (Nr. 143, links); dasselbe findet

*) Pappus, loc. cit., Buch VII, S. 117.

am zweiten Kegelschnitt und dem eingeschriebenen Vierecke A B G′ F′ statt; die beiden Involutionen fallen aber zusammen (98), denn sie haben zwei Paare conjugirter Punkte gemeinschaftlich: das Punktenpaar C C′, in welchem die Transversale beide Kegelschnitte durchschneidet und das Paar derjenigen Punkte, in welchen die Transversale die Gegenseiten A F F′ und B G G′, die beiden Vierecken angehören, trifft. Jedes andere Paar conjugirter Punkte wird beiden Involutionen gemeinschaftlich sein, d. h. die Transversale C C′ wird F G und F′ G′ in demselben Punkte H schneiden, der zu ihrem Schnittpunkt mit A B conjugirt ist. Der vorhergehende Satz, der nur eine Folgerung des Lehrsatzes von Desargues ist, verhilft unmittelbar zur Lösung der beiden folgenden Aufgaben, von denen die eine vom ersten, die andere vom zweiten Grade ist.

I. Aufgabe. Von zwei Kegelschnitten sind drei gemeinschaftliche Punkte A, B, C und ausserdem vom ersten die Punkte D und E, vom zweiten die Punkte F und G gegeben; man soll den vierten Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte finden (Fig. 156).

Wir ziehen aus zwei gemeinschaftlichen Punkten A und B die Transversalen A F und B G, welche den ersten Kegelschnitt in F′ und G′ treffen (diese Punkte kann man mit Nr. 124 rechts construiren). Die Geraden F G und F′ G′ schneiden sich in einem Punkte H derjenigen Sehne, welche die beiden andern gemeinschaftlichen Punkte verbindet. Diese Sehne wird also H C sein; so dass nur noch der Punkt C′ zu construiren bleibt, in welchem sie die beiden Kegelschnitte trifft; der Punkt C′ wird also der gesuchte sein.

II. Aufgabe. Von zwei Kegelschnitten sind zwei gemeinschaftliche Punkte A und B und ausserdem vom ersten die drei Punkte D, E und N, vom zweiten die drei Punkte F, G und M gegeben; man soll noch die zwei übrigen Schnittpunkte bestimmen (Fig. 156).

Wir ziehen A F und B G, welche den ersten Kegelschnitt in F′ und G′ treffen; der Schnittpunkt H von F G und F′ G′ wird auf derjenigen Sehne liegen, welche die beiden gesuchten Punkte verbindet. Schneidet ebenso A M den ersten Kegelschnitt in M′, so wird der Schnittpunkt K von G M und G′ M′ auf derselben Sehne liegen. Die gesuchten Punkte liegen also auf H K und die Aufgabe ist darauf zurückgeführt, die Durchschnitts-

punkte C und C′ der Geraden H K mit einem der beiden Kegelschnitte zu construiren (166) *).

III. Die Construction verändert sich nicht, wenn die Punkte A und B unendlich nahe zusammenrücken, d. h. wenn die beiden Kegelschnitte dieselbe gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren.

Da in diesem Falle zwei sich in einem Punkte A berührende Kegelschnitte gegeben sind, so erhält man die Gerade H K, welche die beiden Schnittpunkte C und C′ verbindet. Sollte diese Gerade durch A gehen, so müsste einer der Punkte C und C′ mit A coincidiren, denn ein Kegelschnitt kann nicht drei Punkte in gerader Linie haben. Man kann dann sagen, dass von den vier Schnittpunkten der beiden Kegelschnitte drei in einem Punkte A vereinigt (oder einander unendlich nahe) sind; man sagt ferner, dass die beiden Kegelschnitte im Punkte A (dem Osculationspunkt) osculiren. Die Construction gibt einen Punkt H derjenigen Geraden, welche den Punkt A mit dem vierten Schnittpunkt C verbindet. Es kann endlich vorkommen, dass diese Gerade mit der Tangente in A coincidirt; man sagt dann, dass A vier zusammenfallende (oder unendlich nahe liegende) Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte vertrete.

IV. Wenden wir jetzt den Hülfssatz auf einen gegebenen Kegelschnitt und einen Kreis an, der ihn in A berührt. Wir ziehen aus A die Normale (senkrecht zu der Tangente in A); sie treffe zum zweiten Mal den Kegelschnitt in F und den Kreis in F′; beschreiben wir über A F als Durchmesser einen Kreis; dieser den Kegelschnitt in A berührende, in F schneidende Kreis wird diese Curve in einem zweiten Punkt G schneiden und der Winkel A G F wird ein rechter sein. Der erste Kreis schneidet A G in G′; nach dem Hülfssatze laufen F G und F′ G′ auf der Sehne HK zusammen; aber F G und F′ G′ sind parallel, weil der Winkel A G′ F′ auch ein rechter ist. Für alle Kreise also, welche den Kegelschnitt in A berühren, hat die Sehne H K eine constante Richtung, nämlich die Richtung F G.

Geht die Sehne H K durch A, so osculiren der Kreis und der Kegelschnitt in A. Ziehen wir dann durch A die Parallele

*) Gaskin, The geometrical construction of a conic section etc. (Cambridge 1852), S. 26, 40.

zu FG, so wird sie den Kegelschnitt in C schneiden; der in A berührende und in C schneidende Kreis wird der Osculations- (Krümmungs-) Kreis in A *).

Umgekehrt kann man den Kegelschnitt construiren, der durch drei gegebene Punkte A, P, Q geht und in A einen gegebenen Kreis als Osculationskreis hat. Die Geraden AP und AQ schneiden den gegebenen Kreis in P′ und Q′; der Schnittpunkt von PQ und P′Q′ sei U. Ziehen wir AU, so wird diese Gerade den Kreis nochmals in C schneiden; der gesuchte Kegelschnitt wird durch C gehen, er ist also durch die vier Punkte A, P, Q und C und die Tangente in A (an den Kreis) bestimmt.

V. Der dem vorhergehenden Hülfssatz correlative Satz kann so ausgesprochen werden: Sind a und b zwei gemeinschaftliche Tangenten an zwei Kegelschnitte und werden aus zwei, auf a und b genommenen, Punkten die Tangenten f und g an den ersten und die Tangenten f' und g' an den zweiten Kegelschnitt gelegt, so werden die Punkte fg und $f'g'$ mit dem Schnittpunkt der beiden ersten gemeinschaftlichen Tangenten an die gegebenen Kegelschnitte in gerader Linie liegen.

Dieser Satz dient dazu, die Aufgaben zu lösen, welche denen von I und II correlativ sind: die gemeinschaftlichen Tangenten (eine oder zwei) an zwei Kegelschnitte zu finden, deren jeder durch fünf gegebene Tangenten bestimmt ist, unter denen schon drei oder zwei, beiden Curven gemeinschaftliche sind.

177. Aufgabe. Man gibt elf Punkte A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, P und soll punktweise denjenigen Kegelschnitt construiren, der durch P und die vier (nicht gegebenen) Schnittpunkte der (nicht gezeichneten) Kegelschnitte ABCDE und $A_1B_1C_1D_1E_1$ geht *1).

Auflösung. Ziehen wir durch P eine beliebige Transversale und construiren (Nr. 166, links) die Punkte M und M′, in welchen sie den Kegelschnitt ABCDE trifft und die Punkte N und N′, in welchen sie den Kegelschnitt $A_1B_1C_1D_1E_1$ trifft. Da diese beiden Kegelschnitte, sowie der gesuchte, demselben Viereck umschrieben werden sollen, so werden wir den Lehrsatz von Desargues anwenden können. Construirt man also (Nr. 102

*) Poncelet, loc. cit., Nr. 334—337.

*1) Poncelet, loc. cit., Nr. 389.

links) den Punkt P', der dem Punkt P in der durch die Paare M M' und N N' bestimmten Involution zugeordnet ist, so wird P' dem gesuchten Kegelschnitt angehören. Lässt man die Transversale sich um den Punkt P drehen, so wird man noch andere Punkte desselben Kegelschnittes erhalten.

178. Aufgabe. Man gibt zehn Punkte A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 und eine Gerade s; man soll einen, s berührenden, Kegelschnitt construiren, der durch die vier (nicht gegebenen) Schnittpunkte der beiden (nicht gezeichneten) Kegelschnitte ABCDE und $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ geht.

Auflösung. Construiren wir (Nr. 166, links) die Schnittpunkte M und M' von s und dem Kegelschnitt ABCDE und die Schnittpunkte N und N' von s und dem Kegelschnitt $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$, hierauf die Doppelpunkte der durch die Paare M M' und N N' bestimmten Involution. Ist P einer dieser Doppelpunkte, so wird P (145) der Berührungspunkt der Tangente s an denjenigen Kegelschnitt sein, der einem Viereck umschrieben ist, welches von den vier Schnittpunkten der Kegelschnitte ABCDE und $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ gebildet wird; damit kommt die Aufgabe auf diejenige der vorhergehenden Nummer zurück.

179. Die correlativen Constructionen geben die Auflösungen der correlativen Aufgaben.

Einen Kegelschnitt zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt geht oder eine gegebene Gerade berührt und einem Vierseit einbeschrieben ist, welches von den vier (nicht gegebenen) gemeinschaftlichen Tangenten an zwei (nicht gezeichnete) Kegelschnitte gebildet wird, welche Kegelschnitte durch je fünf Tangenten bestimmt sind.

180. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt S eine Gerade zu legen, welche von vier gegebenen Geraden a, b, c, d in vier Punkten mit einem gegebenen Doppelverhältniss geschnitten wird.

Auflösung. Wir haben (115) gesehen, dass alle diejenigen Geraden, welche von vier gegebenen Geraden a, b, c, d in vier Punkten geschnitten werden, die ein gegebenes Doppelverhältniss bilden, an denselben Kegelschnitt Tangenten sind, welcher die gegebenen Geraden berührt und dass, wenn D der Berührungspunkt von d, und A, B, C die Schnittpunkte von d und a, b, c sind, das Dop-

pelverhältniss (A B C D) gleich demjenigen der vier Punkte ist, in welchen die Geraden a, b, c, d von irgend einer andern Tangente des Kegelschnittes getroffen werden. Die Auflösung der Aufgabe wird also folgende sein:

Wir construiren (54) den Punkt D der Geraden d, welcher mit den Punkten $a\,d \equiv$ A, $b\,d \equiv$ B, $c\,d \equiv$ C das dem gegebenen gleiche Doppelverhältniss (A B C D) gibt; hierauf zeichnen wir (Nr. 166, rechts) diejenigen durch S gehenden Geraden, welche den durch die vier Tangenten a, b, c, d und den Berührungspunkt D auf d bestimmten Kegelschnitt berühren; jede dieser Geraden wird die vorgelegte Aufgabe lösen.

Ist eine der Geraden a, b, c, d unendlich ferne, so wird die Aufgabe zur folgenden:

Durch einen gegebenen Punkt S eine Gerade so zu legen, dass die auf ihr durch drei gegebene Geraden a, b, c abgeschnittenen Segmente (zwischen a und b, a und c) in einem gegebenen Verhältniss stehen.

Construiren wir auf a den Punkt A, welcher mit den Punkten $a\,b \equiv$ B, $a\,c \equiv$ C dem Verhältniss A B : A C den gegebenen Werth verleiht und ziehen aus S die Tangenten an die Parabel, welche durch die Tangenten a, b, c und den Berührungspunkt A auf a bestimmt ist.

Die correlative Construction gibt die Auflösung der folgenden Aufgabe:

Auf einer gegebenen Geraden s einen Punkt zu finden, aus welchem man vier gegebene Punkte A, B, C, D mit Hülfe von vier Strahlen projiciren kann, die ein gegebenes Doppelverhältniss haben (54).

181. Aufgabe. Zwei gerade projectivische Punktreihen u und u' sind gegeben; man soll zwei entsprechende Segmente suchen, die man aus zwei gegebenen Punkten O und O′ unter gegebenen Winkeln sehen kann *).

Auflösung. Nehmen wir auf u' zwei Punkte A′ und D′ der Art, dass der Winkel A′O′D′ dem zweiten der gegebenen Winkel gleich sei; mögen A und D die Punkte von u sein, welche A′ und D′

*) D. h. sind M P und M′P′ die verlangten Segmente, so müssen die Winkel M O P und M′O′P′ der Grösse und dem Sinne nach gegeben sein.

entsprechen; bestimmen wir jetzt auf u den Punkt A_1 so, dass der Winkel $A_1 O D$ gleich dem ersten der gegebenen Winkel wird; offenbar wäre die Aufgabe gelöst, wenn $O A_1$ mit $O A$ zusammenfiele, denn in diesem Falle wären beide Winkel $A O D$ und $A' O' D'$ den gegebenen Winkeln gleich. Lässt man gleichzeitig die Strahlen $O A$, $O' A'$, $O' D'$, $O D$, $O A_1$ sich verändern, so sind die erzeugten Büschel zu einander projectivisch. Es sind nämlich die von $O' A'$ und $O' D'$ erzeugten Büschel projectivisch, ebenso die von $O A_1$ und $O D$ erzeugten, weil die Winkel $A' O' D'$ und $A_1 O D$ constant sind (82); auch die von $O A$ und $O' A'$ und von $O D$ und $O' D'$ erzeugten Büschel sind wegen der projectivischen Verwandtschaft von u und u' projectivisch. Folglich sind die von $O A$ und $O A_1$ erzeugten Büschel projectivisch und die entsprechend gemeinschaftlichen Strahlen lösen die Aufgabe. Machen wir drei dem vorigen ähnliche Versuche, so werden wir drei Paare entsprechender Strahlen $O A$ und $O A_1$, $O B$ und $O B_1$, $O C$ und $O C_1$ erhalten und construiren wir die entsprechend gemeinschaftlichen Strahlen der durch diese drei Paare bestimmten concentrischen Strahlenbüschel (162). Trifft einer der entsprechend gemeinschaftlichen Strahlen u in M, nimmt man dann auf u den Punkt P so, dass der Winkel $M O P$ dem ersten der gegebenen Winkel gleich wird, nennt man hierauf M' und P' diejenigen Punkte von u', welche M und P entsprechen, so wird Winkel $M' O' P'$ dem zweiten gegebenen Winkel gleich, oder die Aufgabe ist gelöst.

182. Aufgabe. Zwei projectivische Punktreihen $u \equiv ABC\ldots$ und $u' \equiv A'B'C'\ldots$ sind gegeben; man soll zwei entsprechende Segmente finden, welche (in Grösse und Sinn) mit zwei gegebenen Segmenten übereinstimmen.

Auflösung. Nehmen wir auf u' ein Segment $A' D'$, das dem zweiten gegebenen Segmente gleich ist und auf u das Segment $A D$, welches $A' D'$ entspricht. Nehmen wir auf u den Punkt A_1 so, dass $A_1 D$ dem ersten gegebenen Segment gleich wird, so wäre die Aufgabe gelöst, wenn die Punkte A und A_1 zusammenfielen. Lässt man gleichzeitig die Punkte A, A', D', D, A_1 sich verändern, so sind die von A und A' erzeugten Punktreihen projectivisch, sowie auch die von D und D' erzeugten Reihen (wegen der projectivischen Verwandtschaft von u und u'; die von A und D beschriebenen Punktreihen, sowie die von A' und D' beschriebenen

sind auch projectivisch, da sie durch die Bewegung constanter Segmente entstanden sind (77). Folglich sind auch die von A und A_1 erzeugten Punktreihen projectivisch und ihre entsprechend gemeinschaftlichen Punkte lösen die Aufgabe. Man hat also nur mit Hülfe dreier Versuche drei Paare entsprechender Punkte A und A_1, B und B_1, C und C_1 herzustellen und hierauf die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte zu construiren (162).

183. Der Studirende hat gewiss die Beständigkeit der Methode wahrgenommen, welche wir bei der Auflösung der vorhergehenden Aufgaben angewandt haben. Sie ist allgemein, gleichartig und direct; man kann sie in mehr oder weniger einfacher Art auf alle Aufgaben des zweiten Grades, d. h. auf alle Fragen anwenden, welche, algebraisch gelöst, von einer Gleichung des zweiten Grades oder von einer Gleichung höheren Grades abhängen würden, die auf eine solche des zweiten zurückgeführt werden kann. Die Methode besteht darin, dass man drei Versuche macht, welche drei Paare entsprechender Elemente zweier aufeinander liegender projectivischer Gebilde liefern; die entsprechend gemeinschaftlichen Elemente sind die Lösungen der Aufgabe. Dieses Verfahren ist darum mit Recht eine geometrische Methode der falschen Position genannt worden *).

184. Die Aufgaben des zweiten Grades (oder die auf den zweiten Grad reducirbaren) werden, wie alle diejenigen der niederen Geometrie, nur mit Hülfe des Lineals und des Cirkels, d. h. mit Hülfe von Durchschnitten von Geraden und Kreisen gelöst *1). Man kann aber andererseits jede dieser Aufgaben von der Bestimmung der entsprechend gemeinschaftlichen Elemente von zwei übereinander liegenden projectivischen Gebilden abhängig machen, welche Bestimmung auf die Construction der entsprechend gemeinschaftlichen Punkte (162) von zwei gegebenen projectivischen Reihen (157) auf einem ganz beliebig angenommenen Kreise herauskommt. Daraus folgt, dass ein einziger, ein für allemal beschriebener Kreis, dazu dienen kann, alle Aufgaben des zweiten

---

*) Chasles, Géom. sup., S. 212.

*1) Aufgaben des ersten Grades werden solche genannt, die nur mit Hülfe des Lineals, d. h. mit Durchschnitten von Geraden gelöst werden können. Siehe Lambert, loc. cit., S. 161; Brianchon, loc. cit., S. 6; Poncelet, loc. cit., S. 76.

Grades *), die in Bezug auf gegebene Elemente in einer festen Ebene (der Zeichnungsfläche) gestellt werden können, zu lösen. Nachdem man diesen Kreis gezogen hat, vereinfacht sich die Aufgabe dahin, mit Hülfe von Projectionen und Schnitten diejenigen drei Punktenpaare auf den Kreis überzutragen, welche die projectivischen Gebilde bestimmen, deren entsprechend gemeinschaftlichen Elemente die Aufgabe lösen; man hat dann nur die Gerade zu ziehen, welche die Schnittpunkte der Paare der Gegenseiten in dem eingeschriebenen Sechseck enthält, dessen Gegenecken die Punkte der obigen drei Paare sind (157).

Es ist kaum nothwendig zu bemerken, dass man die Auflösung der Aufgabe nicht von den entsprechend gemeinschaftlichen Elementen von zwei übereinander liegenden projectivischen Gebilden abhängig machen muss, sondern dass man sie auch auf die Bestimmung der Doppelelemente einer Involution hinausführen kann (165).

Wir haben schon in Nr. 89 ein Beispiel von dem Verfahren gegeben, eine Aufgabe des zweiten Grades nur mit Hülfe des Lineals zu lösen, indem wir voraussetzten, dass in der Zeichnungsfläche ein Hülfskreis gezeichnet sei und dass man den Mittelpunkt dieses Kreises kenne. Wir werden weiter unten noch andere Beispiele finden.

185. Folgende Aufgaben werden auf ähnliche Art gelöst:

I. Man gibt (Fig. 157) zwei gerade projectivische Punktreihen u und u' und zwei andere gerade projectivische Punktreihen v und v'; man soll durch den Punkt O zwei Geraden s und s' legen, welche u und u' in zwei

Fig. 157.

*) Poncelet, loc. cit., S. 187. — Steiner, Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises (Berlin, 1833), S. 67. Gesammelte Werke, Bd. I, 461—522.

entsprechenden Punkten und gleichzeitig auch v und v' in zwei entsprechenden Punkten schneiden.

Durch O ziehen wir eine Gerade, welche u' und v' in A′ und P′ schneidet; dem Punkte A′ entspreche A auf u, dem Punkte P′ entspreche P auf v. Die Aufgabe wäre gelöst, wenn die Geraden O A und O P zusammenfielen. Lässt man gleichzeitig diese Geraden sich verändern, so beschreiben sie zwei concentrische projectivische Büschel (bestimmt durch drei dem eben gemachten ähnliche Versuche), deren entsprechend gemeinschaftliche Strahlen die Auflösungen der Aufgabe liefern.

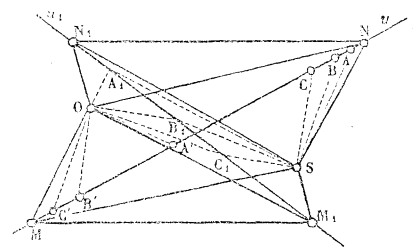
II. Man kann in der vorigen Aufgabe annehmen, dass die Punktreihen u und u' und ebenso v und v' aufeinander liegen. Lägen alle vier Punktreihen auf derselben Geraden, so könnte die Aufgabe so ausgesprochen werden:

Sind auf einer Geraden zwei projectivische Punktreihen u und u' und noch zwei andere v und v' gegeben, so hat man zwei Punkte zu bestimmen, welche sowohl als Punkte von u und u', als auch als Punkte von v und v' einander entsprechen.

III. Zwischen zwei gegebene Gerade u und u_1 soll eine Strecke so gelegt werden, dass sie aus zwei Punkten O und S unter gegebenen Winkeln gesehen wird (Fig. 158).

Wir ziehen durch S zwei Geraden, welche u und u_1 in A und A_1 schneiden, so dass der Winkel A S A_1 dem zweiten ge-

Fig. 158.



gebenen Winkel gleich sei; dann legen wir durch O eine andere Gerade, welche u in A′ schneidet und so, dass der Winkel A′ O A_1 dem ersten gegebenen Winkel gleich wird. Die Aufgabe wäre gelöst, wenn O A mit O A′ zusammenfiele. Drei Versuche wie derjenige, den wir soeben gemacht haben, liefern drei Paare entsprechender Strahlen (O A und O A′, O B und O B′, O C und O C′) der beiden projectivischen Büschel, die entstehen würden,

wenn man O A und O A′ sich verändern liesse; die entsprechend gemeinschaftlichen Strahlen O M und O N dieser Büschel geben die Lösungen (MM_1 und NN_1) der Aufgabe.

IV. Zwei projectivische Punktreihen u und u' sind gegeben; man soll zwei entsprechende Segmente A M und A′ M′ finden, die, von zwei gegebenen entsprechenden Punkten A und A′ aus gemessen, in einem gegebenen Verhältniss $AM : A'M' = \lambda$ stehen.

Sind A und A′, B und B′, C und C′ drei Paare entsprechender Punkte von u und u', so wählen wir auf u zwei neue Punkte B″ und C″ so, dass $AB'' = \lambda A'B'$, $AC'' = \lambda A'C'$. Die Punkte A, B″, C″,... bestimmen eine Punktreihe, die der Reihe A′ B′ C′... ähnlich (73) und darum zu A B C... projectivisch ist. Die aufeinander liegenden Punktreihen A B″ C″... und A B C... haben schon einen entsprechend gemeinschaftlichen Punkt A; der andere entsprechend gemeinschaftliche Punkt M (72) wird die Aufgabe lösen, denn man wird haben

$$AM = AM'' = \lambda A'M'.$$

Die Aufgabe ist vom ersten Grade.

V. Zwei aufeinander liegende projectivische Punktreihen A B C... und A′ B′ C′... sind gegeben; man soll ein Segment M M′ finden, dessen Mittelpunkt ein gegebener Punkt O ist.

Wir wählen die Punkte A″, B″, C″ der Art, dass O der Mittelpunkt der Segmente A A″, B B″, C C″ wird; die Punkte A″, B″, C″,... bestimmen eine Punktreihe, welche der Reihe ABC... gleich und folglich zu der Reihe A′ B′ C′... projectivisch ist. Construiren wir die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte der aufeinander liegenden projectivischen Punktreihen A′ B′ C′... und A″ B″ C″...; ist nun M′ oder M″ einer der entsprechend gemeinschaftlichen Punkte, so wird O die Mitte des Segmentes M M′ sein.

VI. Ein Segment EF ist gegeben; man soll auf EF zwei Punkte M und M′ so bestimmen, dass das Segment M M′ gleich einem gegebenen Segment und das Doppelverhältniss (E F M M′) einer gegebenen Zahl gleich sei.

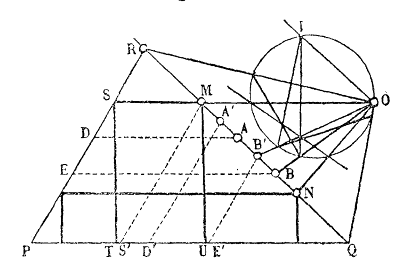
Wir wählen auf der gegebenen Geraden drei beliebige Punkte A, B, C; hierauf bestimmen wir die drei Punkte A′, B′, C′ so, dass die Doppelverhältnisse (E F A A′), (E F B B′), (E F C C′) alle gleich dem gegebenen werden und die drei Punkte A″, B″, C″

so, dass die Segmente A A″, B B′, C C″ dem gegebenen Segment gleich werden. Dann werden die Punktreihen A B C . . . und A′ B′ C′ . . . projectivisch sein (61, 83) und ebenso die Punktreihen A B C . . . und A″ B″ C″ . . . (77), also sind auch die Reihen A′ B′ C′ . . . und A″ B″ C″ . . . projectivisch. Haben diese Reihen entsprechend gemeinschaftliche Punkte (M′ oder M″) und ist M der entsprechende Punkt in der Reihe A B C . . ., so werden das Segment M M′ und das Doppelverhältniss (E F M M′) die gegebenen Werthe haben und die Aufgabe ist gelöst.

VII. In ein gegebenes Dreieck P Q R ein Rechteck mit gegebenem Inhalt einzubeschreiben (Fig. 159).

Das gesuchte Rechteck sei M S T U; ziehen wir M S′ parallel P R, so bekommen wir das Parallelogramm M S P S′, das gleich

Fig. 159.



dem Rechteck ist; wir können also die Aufgabe in folgende umwandeln:

Auf Q R soll ein Punkt M der Art gefunden werden, dass, wenn M S und M S′ beziehungsweise P Q und P R parallel gezogen werden, das Rechteck P S . P S′ einem gegebenen Quadrat k^2 gleich wird.

Nehmen wir einen beliebigen Punkt A auf Q R, ziehen A D parallel P Q und nehmen auf P Q den Punkt D′ so, dass P D . P D′ $= k^2$, ziehen dann D′ A′ parallel P R. Coincidiren die Punkte A und A′, so ist die Aufgabe gelöst.

Lässt man gleichzeitig die Punkte A, D, D′, A′ sich verändern, so beschreiben sie eben so viele projectivische Punktreihen. Da nämlich D die aus dem unendlich fernen Punkte von P Q gemachte Projection des Punktes A und A′ die aus dem unendlich fernen Punkte von P R gemachte Projection von D′ ist, so ist die zweite Punktreihe zur ersten perspectivisch und ebenso

die vierte zur dritten. Die zweite Punktreihe und die dritte aber sind projectivisch, denn die Relation

$$PD \,.\, PD' = k^2$$

zeigt (59), dass die gleichzeitig sich verändernden Punkte D und D′ zwei projectivische Punktreihen beschreiben, deren unendlich ferne Punkte denselben entsprechenden Punkt P haben *).

Drei ähnliche Versuche geben drei solche Punktenpaare wie A und A′; construirt man die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte, so hat man die Lösungen der Aufgabe.

Statt den Punkt A in den drei Versuchen ganz beliebig zu nehmen, kann man ihm eine besondere Lage geben, welche die Construction vereinfacht. Diese Bemerkung kann übrigens bei allen Aufgaben gemacht werden, welche wir untersucht haben. In der vorliegenden ist klar, dass, wenn der Punkt A in die unendliche Ferne rückt, auch seine Projection D sich unendlich entfernt, D′ fällt also auf P, folglich coincidirt A′ mit R; legt man den Punkt A in Q, so coincidirt die Projection D mit P, folglich rückt D′ und darum auch A′ in die unendliche Ferne. So hat man nun zwei Versuche, die gar keine Construction erfordern; die Paare, die sich daraus ergeben, sind aus R und dem unendlich fernen Punkte, aus dem unendlich fernen Punkt und Q zusammengesetzt. Nennen wir B B′ das durch einen dritten Versuch sich ergebende Paar und A A′ ein beliebiges Paar, so haben wir (59)

$$QA \,.\, RA' = QB \,.\, RB'$$

und folglich, wenn M ein entsprechend gemeinschaftlicher Punkt ist,

$$QM \,.\, RM = QB \,.\, RB',$$

woraus die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte gefunden werden können; es wird aber immer einfacher sein, auf die allgemeine Construction von Nr. 162 zurückzugehen; d. h. man zieht durch einen beliebigen Punkt O eines Kreises die Geraden O B, O B′, O R, O Q und die Parallele zu Q R, welche fünf Geraden

*) Nennt man die beiden Punktreihen u und u' und geht man auf die Construction Nr. 67 links zurück, so sieht man, dass die Hülfsreihe u'' ganz in unendlicher Ferne ist. Hat man also ein Paar entsprechender Punkte D und D′ gefunden und soll zu einem andern Punkt E von $PR \equiv u$ den entsprechenden Punkt E′ suchen, so hat man nur D′ und E zu verbinden und D E′ parallel D′ E zu ziehen.



den Kreis zum zweitenmal in B_1, B_1', R_1, Q_1, I schneiden *); verbinden wir dann den Schnittpunkt von $B_1 R_1$ und $B_1' I$ mit demjenigen von $B_1 I$ und $B_1' Q_1$ und schneidet diese Gerade den Kreis in zwei Punkten (M_1, N_1), so treffen die Geraden, welche sie aus O projiciren, QR in den gesuchten entsprechend gemeinschaftlichen Punkten M und N; mit ihnen ist die Aufgabe gelöst.

VIII. Ein Polygon zu construiren, dessen Seiten durch eben so viele gegebene Punkte gehen und dessen Eckpunkte, einen ausgenommen, auf eben so vielen gegebenen Geraden liegen, während der Winkel am letzten Eckpunkt einem gegebenen Winkel gleich ist.

Es sei z. B. ein Dreieck LMN (Fig. 160) zu construiren, dessen drei Seiten MN, NL, LM beziehungsweise durch O, V, U gehen, und von welchem zwei Eckpunkte M und N auf den Geraden u und v liegen, während der Winkel MLN eine bestimmte Grösse erhält.

Fig. 160.

Ziehen wir durch O eine beliebige Gerade, welche u in A und v in B schneidet und durch U die Gerade UX, welche mit BV einen Winkel bildet, der dem gegebenen Winkel gleich ist. Ist A′ der Schnittpunkt von u und UX, so wäre die Aufgabe gelöst, wenn die Punkte A und A′ zusammenfielen. Man wird die Lösungen der Aufgabe erhalten, indem man die entsprechend gemeinschaftlichen Punkte derjenigen projectivischen Punktreihen construirt, in welchen u von den gleichzeitig beweglichen Strahlen OA, UA′ geschnitten wird.

IX. Folgende Aufgabe ist in der vorhergehenden enthalten:

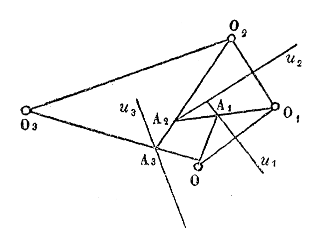
Ein Lichtstrahl geht aus einem gegebenen Punkte O und wird nacheinander auf n gegebenen Geraden u_1,

*) Von diesen Punkten ist nur I in der Figur bezeichnet.

$u_2, \ldots u_n$ zurückgeworfen; man soll die Richtung bestimmen, welche man dem ursprünglichen Strahl zu geben hat, damit er von dem letzten zurückgeworfenen Strahl unter einem gegebenen Winkel A geschnitten werde.

Trifft nämlich der einfallende Strahl OA_1 (Fig. 161) die Gerade u_1 in A_1, so müssen nach dem Gesetze der Reflexion der einfallende und der zurückgeworfene Strahl mit u_1 gleiche (ent-

Fig. 161.



gegengesetzte) Winkel bilden; da nun der einfallende Strahl durch den fixen Punkt O geht, so wird der zurückgeworfene Strahl immer durch den Punkt O_1 gehen, der in Bezug auf u_1 zu O symmetrisch liegt *). Ebenso wird der erste zurückgeworfene Strahl, nachdem er u_2 in A_2 getroffen hat, nach demselben Gesetz zurückgeworfen; folglich geht der zweite zurückgeworfene Strahl durch einen fixen Punkt O_2, der in Bezug auf u_2 zu O_1 symmetrisch liegt; und so weiter. Der ursprüngliche Strahl und die n aufeinander folgenden, zurückgeworfenen Strahlen, sind also die Seiten eines Polygons $OA_1A_2A_3\ldots$, dessen $n+1$ Seiten durch eben so viele gegebene Punkte $O, O_1, O_2, \ldots O_n$, gehen, während der Winkel A einem gegebenen Winkel gleich sein soll und die Scheitel der n übrigen Winkel auf n gegebenen Geraden $u_1, u_2, \ldots u_n$ liegen sollen.

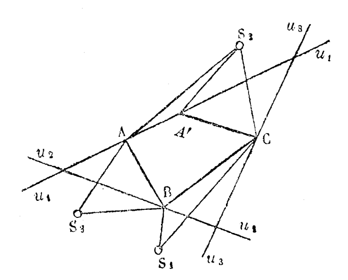
X. Aufgabe. Ein Polygon zu construiren, dessen Eckpunkte auf gegebenen Geraden liegen und dessen Seiten aus gegebenen Punkten unter gegebenen Winkeln gesehen werden.

Setzen wir voraus, es handle sich darum, ein Dreieck zu construiren, dessen Eckpunkte 1, 2, 3 auf gegebene Geraden u_1, u_2, u_3 fallen und dessen Seiten 23, 31, 12 aus den gegebenen

*) D. h. Punkt O_1 liegt so, dass OO_1 senkrecht auf u_1 steht und durch diese Gerade halbirt wird.

Punkten S_1, S_2, S_3 unter (der Grösse und dem Sinne nach) gegebenen Winkeln ω_1, ω_2, ω_3 gesehen werden. Nehmen wir einen beliebigen Punkt A auf u_1 (Fig. 162), ziehen $A S_3$ und machen den Winkel $A S_3 B$ gleich ω_3. Der zweite Schenkel dieses Winkels schneide u_2 in B. Machen wir den Winkel $B S_1 C$ gleich ω_1; der zweite Schenkel dieses Winkels schneide u_3 in C und machen wir den Winkel $C S_2 A'$ gleich ω_2. Die Aufgabe wäre gelöst, wenn der zweite Schenkel $S_2 A'$ mit $S_2 A$ zusammenfiele. Lassen wir $S_2 A$ sich um S_2 drehen, so verändern sich gleich-

Fig. 162.



zeitig die andern Strahlen $S_3 A$, $S_3 B$, $S_1 B$, $S_1 C$, $S_2 C$ und $S_2 A'$ und erzeugen eben so viele Büschel, die alle zu einander projectivisch sind. Es sind nämlich die von $S_3 A$ und $S_3 B$ erzeugten Büschel projectivisch (82), weil der Winkel $A S_3 B$ constant ist; die von $S_3 B$ und $S_1 B$ erzeugten Büschel sind projectivisch, weil sie perspectivisch sind und so weiter. Die Auflösungen der Aufgabe werden also mit den entsprechend gemeinschaftlichen Strahlen derjenigen concentrischen Büschel erhalten, welche von $S_2 A$ und $S_2 A'$ erzeugt werden.

Die Aufgabe wird in derselben Weise gelöst, wenn die Winkel in S_1 und S_2 nicht gegebenen Winkeln gleich, sondern von Paaren gegebener Geraden so getheilt sein sollen, dass man in jedem dieser Punkte einen Büschel von vier Strahlen erhält, die ein gegebenes Doppelverhältniss haben. Soll in jedem der gegebenen Punkte S_1, S_2, ... der Büschel harmonisch und die gegebenen Strahlen rechtwinklig sein, so kann die Aufgabe so ausgedrückt werden (53):

Ein Polygon zu construiren, dessen Eckpunkte auf gegebene Gerade fallen und dessen Seiten aus gegebenen Punkten unter Winkeln gesehen werden, deren Halbirungslinien gegeben sind.

XI. Dieselbe Methode gibt die Auflösung der Aufgabe:

Ein Polygon zu construiren, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen und dessen Winkel gegebene Segmente in gegebenen Doppelverhältnissen theilen *).

Man erhält besondere Fälle dieser Aufgabe, indem man voraussetzt, dass jeder Winkel auf einer gegebenen Geraden ein der Grösse und dem Sinne nach gegebenes Segment oder ein Segment herausschneide, welches von einem gegebenen Punkt in einem gegebenen Verhältniss getheilt werde *[1]).

§ 20. **Pole und Polaren.**

186. Ist S ein beliebiger Punkt in der Ebene eines Kegelschnittes (Fig. 162_a), und zieht man durch diesen Punkt eine beliebige Anzahl von Transversalen, welche die Curve in den Punktenpaaren (A, A'), (B, B'), (C, C'),... schneiden, so schneiden sich nach Nr. 160 und 161 die Tangentenpaare (a, a'), (b, b'), (c, c'),... in Punkten einer festen Geraden s, welche die Berührungspunkte der von S ausgehenden Tangenten enthält; überdies schneiden sich die Paare der Geraden AB' und A'B, AC' und A'C,... BC' und B'C,... AB und A'B', AC und A'C',... BC und B'C',... in Punkten von s. Man kann noch eine andere Eigenschaft der Geraden s erkennen, indem man das vollständige Viereck AA'BB' betrachtet: Die Gegenseiten AA' und BB' werden durch den Diagonalpunkt S und durch die Gerade s, welche die beiden anderen Diagonalpunkte verbindet, harmonisch geschnitten (50); es sind also die Punkte A und A' (ebenso B und B', C und C',...) durch S und s harmonisch getrennt.

Die so durch den beliebigen Punkt S bestimmte Gerade s heisst die Polare von S in Bezug auf den Kegelschnitt und umgekehrt heisst S der Pol der Geraden s.

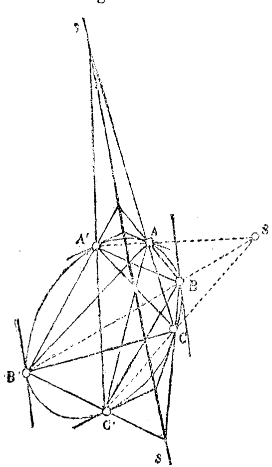
---

*) D. h. die Schenkel eines Winkels sollen eine gegebene Gerade, auf welcher zwei fixe Punkte A und B sind, in zwei anderen Punkten C und D so schneiden, dass das Doppelverhältniss (ABCD) eine gegebene Zahl wird.

*[1]) Chasles, Géom. sup., S. 219—223 und Towwsend, Chapter on the modern Geometry (Dublin, 1865), Bd. II, S. 257—274.

Die Polare eines gegebenen Punktes S ist also gleichzeitig: 1. der Ort des Schnittpunktes der Tangentenpaare, deren Berührungspunkte mit S in derselben Geraden liegen; 2. der Ort der Schnitt-

Fig. 162 a.



punkte der Gegenseitenpaare eines jeden eingeschriebenen Vierecks, dessen Diagonalen durch S gehen; 3. der Ort eines durch zwei Kegelschnittpunkte von S harmonisch getrennten Punktes *).

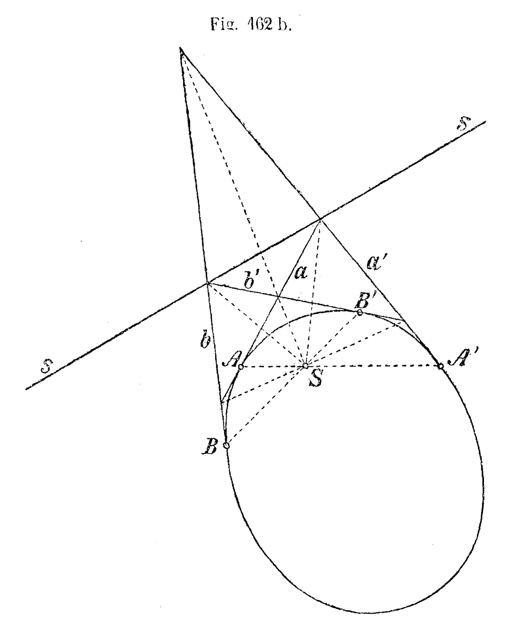
187. Umgekehrt bestimmt eine beliebig gegebene Gerade s einen Punkt S, zu welchem sie Polare ist. Denn sind A und B irgend zwei Punkte des Kegelschnittes, so werden die Geraden a und b, die Tangenten in A und B sein sollen, jene Gerade s in zwei Punkten schneiden, aus welchen die zweiten Tangenten a' und b' gezogen werden können; ihre Berührungspunkte seien A′ und B′ und S sei der Schnittpunkt von A A′ und B B′. Dann wird die Polare von S die Punkte $a a'$ und $b b'$ enthalten, sie wird also mit s zusammenfallen.

*) Apollonius, loc. cit., Buch VII, 37. — Desargues, loc. cit., S. 164 ff.; De la Hire, loc. cit., Buch I und II.

Kann man also aus irgend einem Punkte von s zwei Tangenten c und c' an den Kegelschnitt ziehen, so geht die Gerade CC', welche ihre Berührungspunkte verbindet, durch S.

I. Die Geraden a, a', b, b' (Fig. 162_b) bilden ein umschriebenes Vierseit, dessen eine Diagonale s ist; seine beiden andern Diagonalen schneiden sich in S (135); zieht

Fig. 162 b.

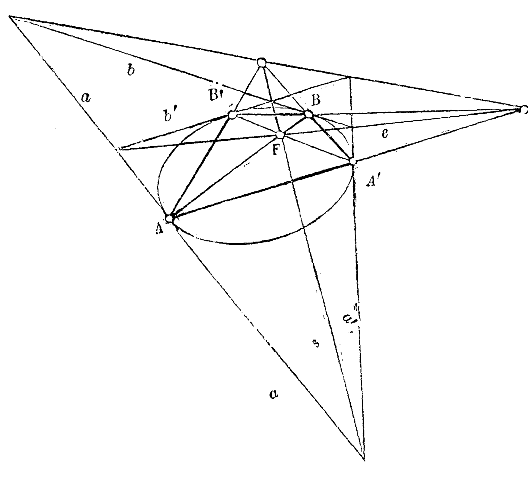


man also aus einem beliebigen Punkte von s zwei Tangenten an den Kegelschnitt, so sind diese durch s und eine Gerade, die immer durch S geht, harmonisch getrennt (49).

II. Das vollständige Viereck AA'BB' und das vollständige Vierseit $a\,a'\,b\,b'$ haben dasselbe Diagonaldreieck (132), dessen Eckpunkte S, der Schnittpunkt von AB und A'B' und der Schnittpunkt von AB' und A'B sind; seine Seiten sind s, die Verbindungslinie der Punkte $a\,b$ und $a'\,b'$ und die Verbindungslinie der Punkte $a\,b'$ und $a'\,b$. Zieht man also aus zwei Punkten der Geraden s die Tangenten-

paare (a, a'), (b, b'), so gehen die Diagonalen des umschriebenen Vierseits $aba'b'$ durch den Punkt S. Man kann z. B. auf Figur 108 zurückgehen, indem man statt der Buchstaben E, D, C, d, c die Buchstaben S, A′, B′, a',

Fig. 162 c.



b' oder an der Stelle der Buchstaben G, B, C, D, b, c, d die Buchstaben S, A′, B, B′, a', b, b' setzt. Fig. 162 c.

188. Ist also ein Kegelschnitt gegeben, so hat jeder Punkt der Ebene seine Polare und jede Gerade ihren Pol *). Der gegebene Kegelschnitt, auf welchen man die Pole und die Polaren bezieht, heisst der Fundamental-Kegelschnitt.

I. Kann man aus einem Punkte der Ebene eines Kegelschnittes zwei Tangenten an die Curve legen, so heisst er ein Aussenpunkt der Curve; er ist ein Innenpunkt, wenn man keine Tangente ziehen kann. Ist also der Pol ausserhalb des Kegelschnittes (160), so schneidet die Polare die Curve (in den Berührungspunkten der von dem Pol ausgehenden Tangenten).

*) Desargues, loc. cit., S. 190.

Ist der Pol innerhalb des Kegelschnittes, so schneidet die Polare den Kegelschnitt nicht.

II. Nimmt man einen Punkt des Kegelschnittes selbst als Pol und lässt eine Transversale um diesen Punkt rotiren, so fällt einer der Schnittpunkte immer mit dem Pol zusammen und da der Schnittpunkt der Tangentenpaare in diesen Punkten die Polare erzeugen soll und die Tangente im Pole fest ist, so ist die Polare eines Punktes des Kegelschnittes die Tangente in diesem Punkte; oder: ist der Pol ein Punkt des Kegelschnittes, so ist die Polare die Tangente in diesem Punkte.

III. Sind umgekehrt alle Punkte der Polare ausserhalb des Kegelschnittes, so ist der Pol ein Innenpunkt; ist die Polare eine Sekante der Curve, so ist der Pol der gemeinschaftliche Punkt der Tangenten in den beiden Schnittpunkten der Sekante, und ist die Polare eine Tangente, so ist der Pol der Berührungspunkt.

189. In Fig. 108 soll E der Pol und F ein Punkt der Polaren sein. Durchschneidet die Gerade EF den Kegelschnitt, so werden die beiden Schnittpunkte durch die Punkte E und F harmonisch getrennt Nr. 186_3; es liegt folglich einer dieser Punkte innerhalb, der andere ausserhalb der Curve, so dass auch E ein Punkt der Polaren sein wird, wenn wir F als Pol ansehen.

Durchschneidet die Gerade EF den Kegelschnitt nicht, so wird die Berührungssehne der von E ausgehenden Tangenten durch F gehen, denn diese Sehne ist die Polare von E.

Ist also F ein Punkt der Polaren von E, so ist auch umgekehrt E ein Punkt der Polaren von F.

Man kann denselben Lehrsatz auch so ausdrücken:

Geht eine Gerade f durch den Pol einer anderen Geraden e, so geht auch umgekehrt e durch den Pol von f.

Denn sind E und F die respectiven Pole von e und f, so wird, da nach Voraussetzung E auf der Polaren von F

liegt, auch F auf der Polaren von E sein, d. h. e wird durch F den Pol von f gehen.

Zwei Punkte, wie E und F, deren jeder auf der Polaren des andern liegt, heissen in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirte oder reciproke Punkte. Man nennt auch zwei solche Geraden, wie e und f, deren jede durch den Pol der andern geht, conjugirte oder reciproke Geraden.

Man kann dem letzten Lehrsatz nun folgenden Ausdruck geben:

Sind zwei Punkte reciprok, so sind auch ihre Polaren reciprok und umgekehrt.

190. Derselbe Lehrsatz kann noch in einer andern Form erscheinen:

Jeder Punkt der Polaren eines Punktes E hat als Polare eine durch E gehende Gerade.

Jede durch den Pol einer gegebenen Geraden e gehende Gerade hat einen Punkt von e als Pol *).

Stellen wir uns mit andern Worten vor, dass ein veränderlicher Pol F eine gegebene Gerade e durchlaufe, so wird die Polare von F stets durch einen fixen Punkt E gehen, welcher der Pol der gegebenen Geraden ist; und umgekehrt, dreht sich eine Gerade f um einen fixen Punkt E, so beschreibt der Pol von f eine gerade Linie e, welche die Polare des gegebenen Punktes E ist.

Oder auch: Der Pol einer gegebenen Geraden e ist der Mittelpunkt desjenigen Büschels, dessen Strahlen die Polaren sämmtlicher Punkte von e sind und die Polare eines gegebenen Punktes E ist der Ort des Poles derjenigen Geraden, welche durch E gehen *1).

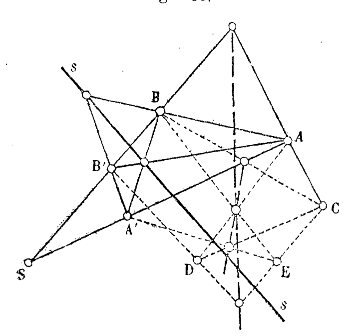
191. Aufgabe. Ein Pol S ist gegeben; man soll seine Polare s construiren.	Aufgabe. Eine Gerade s ist gegeben; man soll ihren Pol S construiren.
I. Sind fünf Punkte A, B, C, D, E des Kegelschnittes bekannt,	Sind fünf Tangenten a, b, c, d, e des Kegelschnittes bekannt,

*) Desargues, loc. cit., S. 191.

*1) Poncelet, loc. cit., Nr. 195.

so hat man nur zwei Transversalen S A und S B zu ziehen und die Punkte A′ und B′ zu construiren, in welchen sie die Curve zum zweitenmal schneiden. Die Gerade s, welche den Schnittpunkt von A B′ und A′B mit demjenigen von A B und A′B′ verbindet, wird die Polare des gegebenen Punktes sein (169). (Fig. 163.)

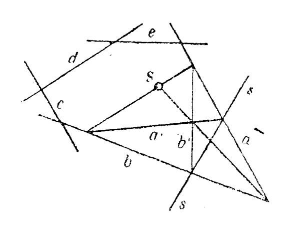
Fig. 163.



II. Setzen wir voraus, der Kegelschnitt sei durch fünf Tangenten a, b, c, d, e bestimmt (Fig. 165). Wir ziehen durch S zwei Transversalen u und v und construiren ihre Pole U und V; die Gerade U V wird die Polare von S sein (190). Zur grösseren Einfachheit ziehen wir die Transversale u durch den Punkt $a\,b$; nachdem die Tangente c' gezogen wurde (124), welche durch den Punkt $u\,c$ geht, wird der Pol U der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierseits $a\,c\,b\,c'$ sein. Nachdem ebenso die Transversale v durch

so hat man nur durch die Punkte $s\,a$ und $s\,b$ die zweiten Tangenten a' und b' zu ziehen (Nr. 124, links). Die Diagonalen des Vierseits $a\,b\,a'\,b'$ werden sich in einem Punkte S schneiden, welcher der Pol der gegebenen Geraden sein wird (Fig. 164).

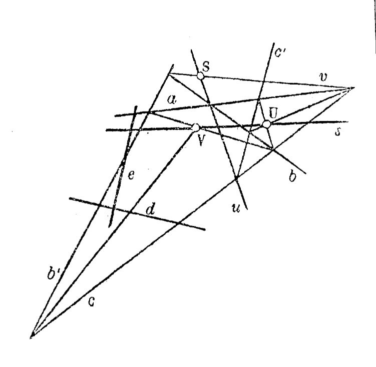
Fig. 164.



Setzen wir voraus, der Kegelschnitt sei durch fünf Punkte A, B, C, D, E bestimmt (Fig. 166). Wir nehmen zwei Punkte U und V auf s und construiren ihre Polaren u und v. Der Punkt $u\,v$ wird der Pol von s sein (190). Zur grösseren Einfachheit nehmen wir den Punkt U auf der Geraden A B; nachdem jetzt der Durchschnitt C′ des Kegelschnittes mit der Geraden U C construirt ist, wird die Polare u die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Gegenseiten des Vierecks A C B C′ sein. Ist ebenso V ein Punkt der Geraden A C

den Punkt $a\,c$ z. B. gezogen und die Tangente b' construirt worden ist, welche durch den

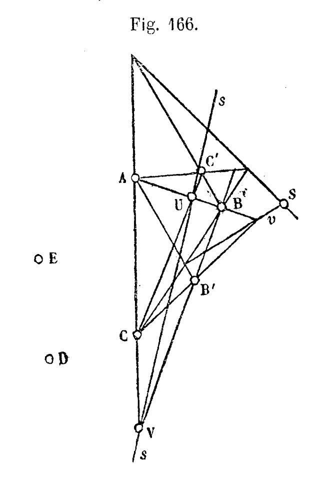
Fig. 165.



Punkt $v\,b$ geht, wird der Pol V der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierseits $a\,b\,c\,b'$ sein.

z. B. und wird der Schnittpunkt B′ des Kegelschnittes mit V B construirt, so wird die Polare

Fig. 166.



v diejenige Gerade sein, welche die Schnittpunkte der Gegenseiten des Vierecks A B C B′ verbindet.

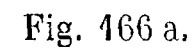
192. In Fig. 166 a mögen E und F zwei reciproke Punkte und G der Pol der Geraden E F sein; G wird sowohl zu E als zu F ein reciproker Punkt sein, d. h. die drei Punkte E, F, G sind paarweise reciprok. Daraus folgt, dass jede Seite des Dreiecks E F G die Polare der Gegenecke ist und dass die drei Seiten paarweise reciproke Geraden sind.

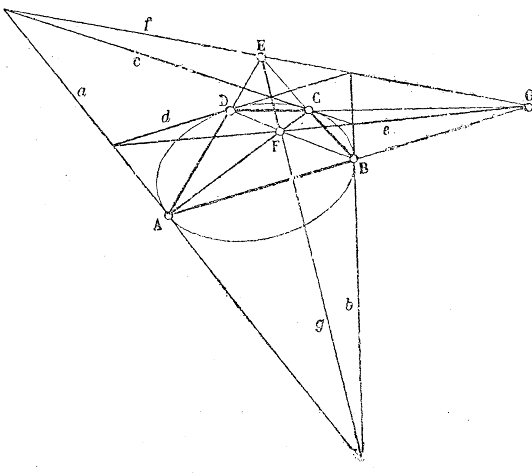
Ein solches Dreieck, wie E F G, in welchem jeder Eckpunkt der Pol der gegenüberliegenden Seite ist, heisst **conjugirtes Dreieck** oder **Poldreieck des Kegelschnittes.**

193. Soll ein Poldreieck construirt werden, so kann man einen Eckpunkt E (Fig. 166 a) beliebig wählen; man construire dann die Polare von E, nehme auf dieser Geraden einen beliebigen Punkt F und construire endlich die Polare von F. Diese wird durch E gehen, weil die Punkte E und F reciprok sind. Ist G der Schnittpunkt der Polaren von E und F, so werden E

und G, F und G Paare reciproker Punkte sein, also ist E F G ein Poldreieck.

Mit anderen Worten: ist E ein beliebiger Punkt und zieht man durch E irgend zwei Transversalen, welche den Kegelschnitt


Fig. 166 a.



in A und D, B und C schneiden; ist ferner F der Schnittpunkt von A C und B D, G derjenige von A B und C D, so wird E F G ein Poldreieck sein.

Man könnte auch eine Gerade e beliebig nehmen, ihren Pol E construiren, durch E eine beliebige Gerade f ziehen, die Pole von e und f durch die Gerade g verbinden und das Dreieck efg wird ein Poldreieck sein; denn die Geraden e, f, g sind paarweise reciprok.

Nachdem eine Gerade e beliebig gewählt wurde, kann man die Tangentenpaare a und d, b und c aus zweien ihrer Punkte ziehen: verbindet f die Punkte ac und bd, und g die Punkte ab und cd, so wird efg ein Poldreieck sein.

194. Mit dem eben Gesagten ist folgende Eigenschaft erwiesen:

I. Die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks, das aus vier beliebigen Punkten eines Kegelschnittes gebildet wird, sind die Eckpunkte eines Poldreiecks. Die Diagonalen des vollständigen Vier-

seits, das von vier beliebigen Tangenten an den Kegelschnitt gebildet wird, sind die Seiten eines Poldreiecks *).

Oder auch:

Die Diagonalpunkte eines vollständigen Vierecks sind die Eckpunkte eines Poldreiecks zu jedem dem Viereck umschriebenen Kegelschnitt. Die Diagonalen eines vollständigen Vierseits sind die Seiten eines Poldreiecks zu jedem dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitt.

II. Aus den Eigenschaften der umschriebenen Vierseite und der eingeschriebenen Vierecke (129—135) folgt überdies (Fig. 166 a):

Ist E F G ein Poldreieck eines gegebenen Kegelschnittes und A B C ein derselben Curve eingeschriebenes Dreieck, von welchem zwei Seiten beziehungsweise durch die Eckpunkte G und F gehen, so wird die dritte Seite B C durch den dritten Eckpunkt E gehen und jede Seite des eingeschriebenen Dreiecks wird durch den entsprechenden Eckpunkt des Poldreiecks und die Verbindungslinie der beiden andern Eckpunkte harmonisch getheilt.

Die drei Geraden E A, F B, C G laufen in einem Punkte D der Curve zusammen, daraus folgt, dass die beiden Dreiecke collinear sind; folglich schneiden sich die drei Linienpaare F G und B C, G E und C A, E F und A B in drei Punkten einer Geraden.

Wir überlassen dem Studirenden die Mühe, die correlative Eigenschaft auszusprechen *1).

195. Von den drei Eckpunkten des Dreiecks E F G ist immer der eine innerhalb, die beiden andern ausserhalb der Curve. Denn ist E ein Innenpunkt, so schneidet die Polare von E den Kegelschnitt nicht; folglich sind F und G Aussenpunkte; ist aber E ein Aussenpunkt, so schneidet die Polare von E die Curve und ihre Schnittpunkte sind durch F und G harmonisch getrennt, also liegt der eine dieser Punkte innerhalb, der andere ausserhalb der Curve.

Aus dieser Eigenschaft und derjenigen von Nr. 188 schlies-

---

*) Desargues, loc. cit., S. 186.

*1) Poncelet, loc. cit., S. 104.

sen wir, dass zwei Seiten des Poldreiecks stets die Curve schneiden, die dritte aber ganz ausserhalb liegt.

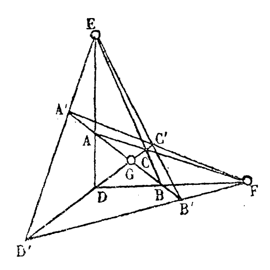
196. Setzen wir voraus, dass zwei vollständige Vierecke ABCD und A′B′C′D′ (Fig. 167) die nämlichen Diagonalpunkte E, F und G haben, d. h. dass

BC, AD, B′C′, A′D′ im Punkte E,
CA, BD, C′A′, B′D′ „ „ F,
AB, CD, A′B′, C′D′ „ „ G

zusammenlaufen.

Befindet sich z. B. Punkt A′ auf AB, so muss, da A′B′ und AB durch G gehen, auch B′ auf AB liegen; da ferner AB

Fig. 167.



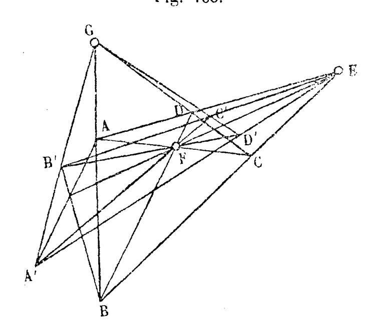
oder A′B′ durch die Geraden GE und GF von CD, sowie von C′D′ harmonisch getrennt sein muss, so liegen die Punkte C, D, C′, D′ auf derselben Geraden oder die acht Punkte A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ liegen auf zwei Geraden (Fig. 167).

Schliessen wir diesen Fall aus, d. h. setzen wir voraus, dass man durch die fünf Punkte A, B, C, D, A′ einen Kegelschnitt legen könne, so behaupten wir, dass die Punkte B′, C′, D′ auf dem nämlichen Kegelschnitt liegen (Fig. 168). Denn weil G der Pol von EF ist (da E, F und G die Diagonalpunkte des eingeschriebenen Vierecks ABCD sind), so sind die beiden Schnittpunkte des Kegelschnittes und der Transversalen GA′B′ durch den Pol G und die Polare EF harmonisch getrennt; aber der eine dieser Schnittpunkte ist A′, folglich ist der andere B′; denn weil E, F und G auch die

Diagonalpunkte des Vierecks A′B′C′D′ sind, so sind die Punkte A′ und B′ durch G und EF harmonisch getrennt. Man beweist ebenso, dass die Punkte C′ und D′ dem Kegelschnitte angehören. Oder:

Haben zwei vollständige Vierecke dieselben Diagonalpunkte, so liegen die acht Eckpunkte entweder auf zwei Geraden oder auf einem Kegelschnitt.

Fig. 168.



Da die Geraden AB und A′B′ in G zusammentreffen, so schneiden sich sowohl die Geraden AA′ und BB′ als die Geraden AB′ und A′B auf EF, der Polaren von G. Diese Eigenschaft führt zu dem Verfahren, den Punkt B′ zu construiren, wenn die Punkte A, B, C, D, A′ gegeben sind. Der Punkt C′ wird als Schnittpunkt der Geraden A′F und B′E und der Punkt D′ als Schnittpunkt der Geraden B′F, A′E und C′G gefunden.

197. Ich setze jetzt voraus, dass zwei Kegelschnitte vier gemeinsame Tangenten a, b, c, d haben, also demselben Vierseit eingeschrieben sind. Die vier Berührungspunkte des einen sollen A, B, C, D, die vier Berührungspunkte des andern A′, B′, C′, D′ sein. Vermöge des Lehrsatzes von Nr. 132 hat das von den Diagonalen des umschriebenen Vierseits $abcd$ gebildete Dreieck die Diagonalpunkte des eingeschriebenen Vierecks ABCD und ebenso die Diagonalpunkte des Vierecks A′B′C′D′ als Eckpunkte; also haben die Vierecke ABCD und A′B′C′D′ die nämlichen Diagonalpunkte. Folglich liegen

nach dem vorhergehenden Lehrsatze (196) die acht Punkte A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ alle entweder auf zwei Geraden oder auf einem Kegelschnitt.

198. Vertauscht man, wie gewöhnlich, die Punkte mit den Geraden, so können die correlativen Sätze bewiesen werden, d. h.:

Haben zwei vollständige Vierseite dieselben drei Diagonalen, so gehen entweder die acht Seiten durch zwei Punkte (vier durch den einen und vier durch den andern) oder sie sind Tangenten an denselben Kegelschnitt.

Schneiden sich zwei Kegelschnitte in vier Punkten, so gehen die acht Tangenten in diesen Punkten entweder alle durch zwei Punkte (vier durch den einen und vier durch den andern) oder sie sind Tangenten an denselben Kegelschnitt *).

199. Gibt man die Diagonalpunkte E, F, G und einen Eckpunkt A eines Vierecks ABCD, so ist das Viereck vollständig bestimmt und kann construirt werden. Denn D ist derjenige Punkt von AE, der durch E und GF von A harmonisch getrennt ist; ebenso ist C derjenige Punkt von AF, der durch F und GE von A harmonisch getrennt ist und B ist derjenige Punkt von AG, der durch G und EF von A harmonisch getrennt ist.

Hat man andererseits einen Kegelschnitt und ein Poldreieck EFG, so kann man auf der Curve einen Punkt A als Eckpunkt eines eingeschriebenen Vierecks ABCD nehmen, dessen Diagonalpunkte E, F und G sind (die andern Eckpunkte B, C und D sind die zweiten Schnittpunkte des Kegelschnittes mit den Geraden AE, AF und AG). Daraus folgt:

Alle durch einen gegebenen Punkt A gehenden Kegelschnitte mit demselben Poldreieck EFG gehen durch drei andere bestimmte Punkte B, C, D.

---

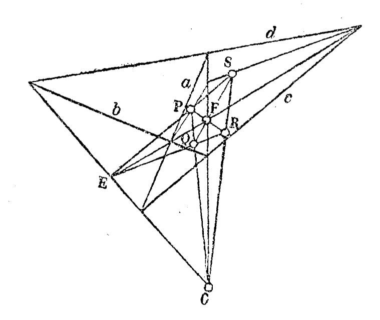
*) Staudt, loc. cit., Nr. 293.

200. Die Aufgabe: „Den Kegelschnitt zu construiren, der durch zwei gegebene Punkte A und A′ geht und zu welchem das gegebene Dreieck E F G Poldreieck ist," wird auf folgende Art gelöst:

Man wird, so wie wir oben gezeigt haben, die drei Punkte B, C, D construiren, welche mit A ein vollständiges Viereck bilden, dessen Diagonalpunkte E, F und G sind. So kennt man dann fünf Punkte A, A′, B, C, D des Kegelschnittes und kann mit Hülfe des Pascal'schen Satzes noch weitere Punkte finden. Man könnte auch die drei Punkte B′, C′, D′ construiren, welche mit A′ ein vollständiges Viereck bilden, dessen Diagonalpunkte E, F und G sind; die acht Punkte A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ würden dem gesuchten Kegelschnitte angehören.

201. Nehmen wir an, es handle sich darum, einen Kegelschnitt zu beschreiben, der vier gegebene Geraden *a*, *b*, *c*, *d* berühre und durch einen gegebenen Punkt S gehe (Fig. 169). Die Diagonalen des Vierseits *a b c d* bilden ein Poldreieck E F G des Kegelschnittes; construirt man also die drei Punkte P, Q, R,

Fig. 169.



welche mit S ein Viereck bilden, dessen Diagonalpunkte E, F und G sind, so gehören die drei so construirten Punkte ebenfalls dem verlangten Kegelschnitte an. Es kann aber vorkommen, dass kein Kegelschnitt der Aufgabe genügt, sowie auch, dass zwei solche Curven existiren (170, rechts); in diesem zweiten Falle also werden, da die Construction der Punkte P, Q und R linear ist, die beiden Kegelschnitte durch diese Punkte gehen. Oder:

Haben zwei demselben Vierseit $abcd$ eingeschriebene Kegelschnitte einen gemeinsamen Punkt S, so schneiden sie sich in drei anderen Punkten P, Q und R und das von den Diagonalen des umschriebenen Vierseits $abcd$ gebildete Dreieck fällt mit dem von den Diagonalpunkten des eingeschriebenen Vierecks PQRS gebildeten Dreieck zusammen.

Was nun die Construction der Punkte P, Q und R und speciell des Punktes P anbetrifft, welcher auf der Geraden ES liegt (Fig. 169), so bemerken wir, dass die Punkte P und S durch E und FG harmonisch getrennt sein müssen (186); aber die durch E gehende Diagonale (ab) (cd) wird ebenfalls in E und F harmonisch getheilt; wir haben also zwei harmonische Gebilde, die wegen dem entsprechend gemeinschaftlichen Punkte E perspectivisch sind, folglich laufen die Geraden P (ab), S (cd), FG, welche die anderen Paare entsprechender Punkte verbinden, in einem Punkte zusammen (44, 62). Man muss also S mit einem Endpunkt einer der durch E gehenden Diagonalen, z. B. mit dem Punkte cd, verbinden; diese Gerade wird FG in einem Punkte treffen, den man mit dem andern Endpunkte derselben Diagonalen, nämlich mit dem Punkte ab durch eine Gerade verbinden wird, welche ES in dem gesuchten Punkte P schneidet *).

202. Die correlativen Sätze und Constructionen, an deren Beweisen der Studirende wohl thun wird, sich zu üben, sind die folgenden:

Alle eine gegebene Gerade berührenden Kegelschnitte, welche ein gegebenes Dreieck als Poldreieck haben, berühren drei andere bestimmte Geraden.

Den Kegelschnitt zu construiren, welcher zwei gegebene Geraden berührt, und ein gegebenes Dreieck als Poldreieck hat.

Haben zwei demselben Viereck umschriebene Kegelschnitte eine gemeinsame Tangente, so haben sie noch drei andere Tangenten gemeinsam.

Die drei gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte zu construiren, welche durch vier gegebene Punkte gehen und eine gegebene Gerade berühren (170, links).

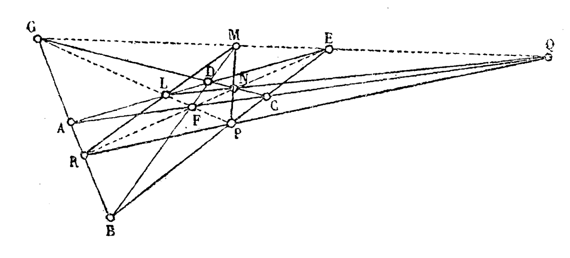
*) Brianchon, loc. cit., S. 45. — Maclaurin, De lin. Geom. § 43.

203. In Figur 170 sei A B C D ein vollständiges Viereck, dessen Diagonalpunkte E, F und G sind; ferner seien

L	und	P	die Schnittpunkte von	F G	mit	A D	und	B C,
M	„	Q	„ „	„ G E	„	B D	„	C A,
N	„	R	„ „	„ E F	„	C D	„	A B.

Die sechs so erhaltenen Punkte sind die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits, denn das Dreieck E F G ist zu jedem der

Fig. 170.



Dreiecke A B C, D C B, C D A, B A D collinear; die respectiven Collineationscentren sind D, A, B, C. Daraus folgt, dass die vier Ternen von Punkten P Q R, P M N, L Q N, L M R auf eben so vielen Geraden (Collineationsaxen) liegen.

Diese vier Geraden bilden ein Vierseit, dessen Diagonalen L P, M Q, N R das Dreieck E F G bilden. Daraus folgt, dass der dem Viereck A B C D eingeschriebene und durch L gehende Kegelschnitt auch durch die Punkte N, P und R geht (201); so gibt es auch einen dem Viereck A B D C eingeschriebenen Kegelschnitt, der durch R, M, N und Q geht und einen dem Viereck A C B D eingeschriebenen, der durch Q, P, M und L geht.

Für jeden dieser Kegelschnitte sind die vier durch die Figur gegebenen Tangenten (die vier Seiten des vollständigen Vierecks A B C D) harmonisch; folglich sind es auch die vier Berührungspunkte (111, 161). Betrachten wir nämlich eine beliebige Seite dieses Vierecks, A B zum Beispiel, so finden wir dieselbe in den Punkten R und G harmonisch getheilt (das zeigt die Betrachtung des vollständigen Vierecks C D E F); die Punkte A, B, G sind die Schnittpunkte der Tangente A B mit den drei übrigen Tangenten, während R der Berührungspunkt der ersten Tangente ist; also werden die vier Tangenten durch eine beliebige andere

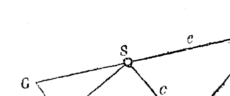
Tangente des betrachteten Kegelschnittes in vier harmonischen Punkten geschnitten *).

Ist A B C D ein Parallelogramm, so rücken die Punkte E, G, M, Q ins Unendliche und L N P R wird auch ein Parallelogramm. Von den drei oben betrachteten Kegelschnitten wird in diesem Fall der erste eine Ellipse sein, welche die Seiten des Parallelogramms A B C D in ihren Mittelpunkten berührt; der zweite ist eine Hyperbel, welche die Seiten A B und C D in ihren Mittelpunkten berührt und die Asymptoten A C und B D hat; der dritte ist eine Hyperbel (mit denselben Asymptoten), welche die Seiten A D und B C in ihren Mitten berührt.

204. In Bezug auf ein umschriebenes Vierseit haben wir schon in Nr. 136 aus der Folgerung des Lehrsatzes von Brianchon (135) das Verfahren abgeleitet, nach welchem die Tangenten eines Kegelschnittes construirt werden können, von dem drei Tangenten a, b, c und zwei Berührungspunkte B und C gegeben sind (Fig. 108). Verbinden wir einen beliebigen Punkt E von B C mit den Punkten ab und ac; diese Geraden g und f werden beziehungsweise c und b in zwei Punkten treffen, durch welche man nur eine Gerade zu legen hat, um eine Tangente d des Kegelschnittes zu bekommen.

Die vier Tangenten a, b, c, d bilden ein vollständiges Vierseit, von welchem zwei Diagonalen $g \equiv (ab)\ (cd)$ und $f \equiv (ac)\ (bd)$ in E zusammentreffen; also muss (135) die

Fig. 171.



Berührungssehne A D der Tangenten a und d die Berührungssehne B C der Tangenten b und c ebenfalls in E schneiden.

*) Steiner, loc. cit., S. 160, § 43, 4. — Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage (Nürnberg, 1856, S. 57, 60), Nr. 329.

Die durch E und die Punkte $a\,b$ und $a\,c$ gezogenen Geraden sind zwei Diagonalen des Vierseits $a\,b\,c\,d$, also reciproke Geraden; daraus folgt (Fig. 171):

Ist ein Dreiseit $a\,b\,c$ einem Kegelschnitt umschrieben, so sind die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes E der Polaren eines Eckpunktes ($b\,c$) mit den beiden andern Eckpunkten ($a\,b$) und ($a\,c$) reciproke Geraden.

Oder umgekehrt: Sind zwei Geraden (c, b) Tangenten an einen Kegelschnitt, so schneiden zwei reciproke Geraden (f, g), die aus einem beliebigen Punkt (E) der Berührungssehne gezogen werden, die beiden gegebenen Tangenten in Punkten, die einer dritten Tangente (a) angehören.

205. Wir werden nun die correlative Eigenschaft darlegen und zu dem Zwecke annehmen, es seien drei Punkte A, B, C eines Kegelschnittes und die Tangenten b und c in zweien dieser Punkte gegeben (Fig. 108). Eine durch den Punkt $b\,c$ beliebig gezogene Gerade e trifft AB und AC in zwei Punkten G und F; die Geraden GC und FB schneiden sich in einem Punkte D des Kegelschnittes.

Die vier Punkte A, B, D, C bilden ein vollständiges Viereck, von welchem zwei Diagonalpunkte auf e liegen; also werden der Punkt $b\,c$ und der Schnittpunkt der Tangenten in A und D auf e fallen (129). Die Punkte G und F sind als Diagonalpunkte des Vierecks ABCD reciprok; folglich (Fig. 171):

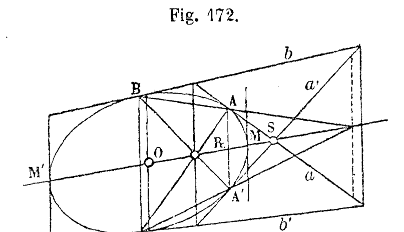
Ist ein Dreieck ABC einem Kegelschnitt eingeschrieben, so sind die Punkte F und G, in welchen zwei Seiten von einer beliebigen durch den Pol S der dritten Seite gezogenen Geraden geschnitten werden, reciprok.

Oder umgekehrt: Verbindet man zwei gegebene Punkte B, C eines Kegelschnittes mit zwei reciproken Punkten G, F, die mit dem Pol S der Verbindungssehne der gegebenen Punkte BC in einer Geraden liegen, so schneiden sich diese Geraden in einem Punkte A der Curve.

§ 21. Centrum und Durchmesser.

206. Nehmen wir einen unendlich fernen Punkt als Pol (Fig. 172) und ziehen durch diesen Pol eine Transversale, welche den Kegelschnitt in zwei Punkten A und A′ schnei-

Fig. 172.



det. Das Segment AA′ wird durch den Pol und einen Punkt der Polaren harmonisch getheilt (186); der Punkt der Polaren wird also die Mitte von AA′ sein (52); mit anderen Worten:

Zieht man in einem Kegelschnitt eine beliebige Anzahl paralleler Sehnen, so ist der Ort ihrer Mittelpunkte eine Gerade und diese Gerade ist die Polare des unendlich fernen Schnittpunktes der Sehnen *).

Man nennt diese Gerade Durchmesser in Bezug auf die Sehnen, welche er halbirt. Trifft der Durchmesser den Kegelschnitt in zwei Punkten, so werden diese die Berührungspunkte der nach dem Pol gerichteten Tangenten, d. h. derjenigen Tangenten sein, welche den halbirten Sehnen parallel sind. Zieht man die Tangenten an die Endpunkte A und A′ einer dieser Sehnen, so werden sie sich in einem Punkte des Durchmessers schneiden. Sind AA′ und BB′ zwei halbirte parallele Sehnen, so schneiden sich die Geraden AB und A′B′, sowie die Geraden AB′ und A′B auf dem Durchmesser (186).

Kann man umgekehrt aus einem Punkte des Durchmes-

*) Apollonius, Conic., lib. I, 46, 47, 48; lib. II, 5, 6, 7, 28—31, 34—37.

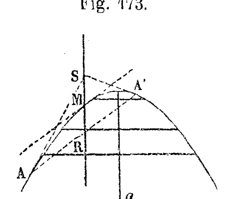
sers zwei Tangenten a und a' an den Kegelschnitt ziehen, so wird die Berührungssehne A A′ durch den Durchmesser halbirt; und zieht man durch diesen Punkt eine Gerade, welche mit dem Durchmesser die beiden Tangenten harmonisch trennt, so wird diese Gerade den halbirten Sehnen parallel sein. Zieht man aus zwei Punkten des Durchmessers zwei Tangentenpaare a und a', b und b', so wird die Verbindungslinie der Punkte $a\,b$ und $a'\,b'$, sowie die Verbindungslinie der Punkte $a\,b'$ und $a'\,b$ ebenfalls den halbirten Sehnen parallel sein (187).

207. Jedem unendlich fernen Punkte, d. h. jedem Büschel paralleler Sehnen entspricht ein Durchmesser. Alle Durchmesser gehen durch denselben Punkt; denn sie sind die Polaren der Punkte einer und derselben, nämlich der unendlich fernen Geraden; der Schnittpunkt der Durchmesser ist der Pol der unendlich fernen Geraden (190).

208. Da die unendlich ferne Gerade eine Tangente an die Parabel und ihr Berührungspunkt der Pol dieser Geraden ist (188), so sind alle Durchmesser der Parabel unter sich parallel (oder nach dem unendlich fernen Punkte gerichtet) (207); und umgekehrt ist jede Gerade, welche die Parabel in unendlicher Ferne schneidet, ein Durchmesser derselben.

209. Ist S ein beliebiger Punkt, aus welchem man zwei Tangenten a und a' an den Kegelschnitt ziehen kann (Fig. 172),

Fig. 173.



so wird die Berührungssehne A A′ oder die Polare von S von dem durch S gehenden Durchmesser in R halbirt; denn S und der unendlich ferne Punkt von A A′ sind reciproke

Punkte. Schneidet der Durchmesser die Curve in M und M', so sind die Tangenten in diesen Punkten der Sehne A A' parallel und eben diese Punkte sind durch den Pol S und seine Polare A A' harmonisch getrennt (186).

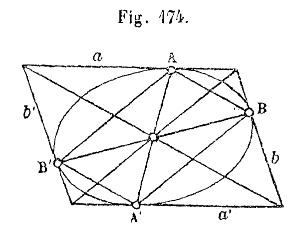
Ist also der Kegelschnitt eine Parabel (Fig. 173), in welchem Falle der Punkt M' unendlich ferne rückt, so ist der Punkt M die Mitte des Segmentes S R oder:

Die Gerade, welche den Mittelpunkt einer Parabelsehne mit ihrem Pole verbindet, wird durch die Curve halbirt *).

210. Ist der Kegelschnitt keine Parabel, so ist die unendlich ferne Gerade nicht mehr Tangente der Curve, folglich ist der Pol dieser Geraden, oder der Schnittpunkt der Durchmesser, ein Punkt in endlicher Entfernung. Da zwei Punkte des Kegelschnittes, die mit dem Pol in einer Geraden liegen, durch den Pol und die Polare harmonisch getrennt sind (186), so ist der Pol die Mitte zwischen den beiden Curvenpunkten, wenn die Polare unendlich fern ist. Jede Sehne des Kegelschnittes also, welche durch den Pol der unendlich fernen Geraden geht, wird durch diesen Punkt halbirt.

Wegen dieser Eigenschaft heisst der Pol der unendlich fernen Geraden oder der Schnittpunkt der Durchmesser der Mittelpunkt des Kegelschnittes.

Fig. 174.



Trägt man die allgemeinen Eigenschaften des Poles und der Polaren (186, 187) auf den Mittelpunkt und die unendlich ferne Gerade über, so erhält man (Fig. 174):

Sind A und A' zwei Punkte des Kegelschnittes in ge-

*) Apollonius, loc. cit., lib. I, 35.

rader Linie mit dem Centrum, so sind die Tangenten in A und A′ parallel.

Sind A und A′, B und B′ zwei Punktenpaare des Kegelschnittes in gerader Linie mit dem Centrum, so sind die Geraden A B und A′ B′, sowie die Geraden A B′ und A′ B parallel und die Figur A B A′ B′ ist ein Parallelogramm.

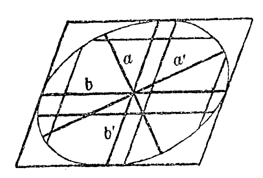
Sind a und a' zwei parallele Tangenten, so geht ihre Berührungssehne und die Gerade, welche den Streifen $a\,a'$ halbirt, durch den Mittelpunkt.

Sind a und a', b und b' zwei Paare paralleler Tangenten, so geht die Verbindungslinie der Punkte $a\,b$ und $a'\,b'$ und die Verbindungslinie der Punkte $a\,b'$ und $a'\,b$ durch das Centrum; ist mit andern Worten $a\,b\,a'\,b'$ ein umschriebenes Parallelogramm, so schneiden sich die Diagonalen im Centrum.

211. Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so schneidet die unendlich ferne Gerade die Curve, folglich ist der Mittelpunkt ein Punkt ausserhalb der Curve (188), in welchem die Tangenten an die unendlich fernen Punkte, d. h. die Asymptoten sich schneiden (Fig. 181).

Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, so trifft die unendlich ferne Gerade die Curve nicht, folglich ist der Mittelpunkt innerhalb der Curve (Fig. 174, 175).

Fig. 175.



212. Zwei Durchmesser des Kegelschnittes (Ellipse oder Hyperbel *) heissen conjugirte, wenn sie reciproke Geraden

*) In der Parabel hat es keine Paare conjugirter Durchmesser; denn weil der Mittelpunkt unendlich ferne liegt, fällt der Durchmesser, welcher zu den durch einen gegebenen Durchmesser halbirten Sehnen parallel ist, mit der unendlich fernen Geraden zusammen.

sind, d. h. wenn der erste durch den Pol des zweiten und folglich der zweite durch den Pol des ersten geht (189).

Da der Pol eines Durchmessers der unendlich ferne Punkt derjenigen Sehnen ist, welche er halbirt, so ist der conjugirte Durchmesser b' eines Durchmessers b parallel zu den durch b halbirten Sehnen; umgekehrt halbirt b' die Sehnen, die parallel b sind *).

Zwei conjugirte Durchmesser und die unendlich ferne Gerade sind die Seiten eines conjugirten Dreiecks oder Poldreiecks (192), von welchem der Mittelpunkt ein Eckpunkt ist; die beiden andern Eckpunkte sind unendlich ferne.

Da in einem Poldreieck zwei Seiten den Kegelschnitt durchschneiden, während die dritte ganz ausserhalb liegt (195) und weil die unendlich ferne Gerade für die Hyperbel eine Sekante ist, für die Ellipse aber nicht, so folgt daraus, dass von zwei conjugirten Durchmessern der Hyperbel nur ein einziger die Curve schneidet, während die Ellipse von allen ihren Durchmessern geschnitten wird.

213. Aufgabe. Fünf Punkte A, B, C, D, E eines Kegelschnittes sind gegeben; man soll dessen Centrum construiren.

Man hat nur die in Nr. 191 rechts II gegebene Construction zu wiederholen, indem man annimmt, dass die Gerade s unendlich ferne liege. Man wird den Punkt C′ suchen, in welchem der Kegelschnitt von einer durch C zu AB parallel gezogenen Geraden zum zweitenmal geschnitten wird, hierauf den Punkt B′ bestimmen, wo der Kegelschnitt von der durch B gezogenen Parallelen zu AC zum zweitenmal getroffen wird; die Gerade u, welche die Schnittpunkte der Gegenseiten des Vierecks ACBC′ verbindet und die Gerade v, welche die Schnittpunkte der Gegenseiten des Vierecks ABCB′ verbindet, werden sich in dem gesuchten Punkte O, dem Pol der unendlich fernen Geraden oder dem Centrum des Kegelschnittes schneiden.

Die Geraden u und v sind die in Bezug auf AB und AC conjugirten Durchmesser; zieht man durch O die Gerade u' pa-

---

*) Apollonius, loc. cit., lib. II, 20.

rallel AB und die Gerade v' parallel AC, so werden uu' und vv' zwei Paare conjugirter Durchmesser sein.

Ist der Kegelschnitt durch fünf Tangenten bestimmt, so findet man seinen Mittelpunkt durch ein Verfahren, das weiter unten (229) auseinandergesetzt wird.

214. Vier Tangenten an einen Kegelschnitt bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonalen die Seiten eines Poldreiecks sind (194). Nehmen wir an, dass diese Tangenten paarweise parallel sind (Fig. 174), so rückt eine Diagonale ins Unendliche, die beiden andern sind also conjugirte Durchmesser (212) oder:

In jedem Parallelogramm, das einem Kegelschnitt umschrieben wird, sind die Diagonalen zwei conjugirte Durchmesser.

Die Berührungspunkte der vier Tangenten bilden ein vollständiges Viereck, dessen Diagonalpunkte die Eckpunkte des Poldreiecks sind (132, 194). Ein Diagonalpunkt dieses Vierecks ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes, die beiden andern sind unendlich ferne, d. h. die sechs Seiten des Vierecks sind die Seiten und Diagonalen eines eingeschriebenen Parallelogramms; die Seiten sind paarweise den Diagonalen des umschriebenen Parallelogramms parallel und die Diagonalen schneiden sich im Centrum.

215. Stellen wir uns umgekehrt (Fig. 174) ein beliebiges, eingeschriebenes Parallelogramm $ABA'B'$ vor und betrachten es als ein vollständiges Viereck; da seine drei Diagonalpunkte die Eckpunkte eines Poldreiecks sein müssen, so wird der eine Mittelpunkt des Kegelschnittes und die beiden andern die unendlich fernen Punkte von zwei conjugirten Durchmessern sein, oder:

In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Parallelogramm sind die Seiten zwei conjugirten Durchmessern parallel und schneiden sich die Diagonalen im Centrum. Oder auch:

Die beiden Sehnen, welche einen veränderlichen Punkt A eines Kegelschnittes mit den End-

punkten eines festen Durchmessers BB′ verbinden, sind immer zwei conjugirten Durchmessern parallel.

216. Aus Nr. 214 schliesst man unmittelbar: Zwei parallele Tangenten (a, a') werden von zwei conjugirten Durchmessern in vier Punkten geschnitten, die mit einander verbunden, zwei andere parallele Tangenten (b, b') geben.

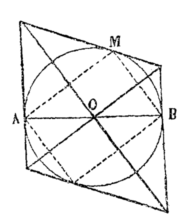
Zieht man durch die Endpunkte (A, A′) eines Durchmessers Parallele zu zwei conjugirten Durchmessern, so treffen sie sich in zwei Punkten der Curve, die mit einander verbunden, einen andern Durchmesser geben.

Sind zwei parallele Tangenten a, a' mit den Berührungspunkten A und A′ und eine dritte Tangente b gegeben und zieht man aus dem Punkte A eine Parallele zu dem durch $a'b$ gehenden Durchmesser, so trifft diese die dritte Tangente b in ihrem Berührungspunkte B.

Sind zwei parallele Tangenten a und a', ihre Berührungspunkte A und A′ und ein anderer Punkt B des Kegelschnittes gegeben, so wird die Tangente in B die eine Tangente a in einem Punkte desjenigen Durchmessers schneiden, der parallel A′B geht und die andere Tangente a' in einem Punkte desjenigen Durchmessers treffen, der parallel AB ist.

217. Nehmen wir jetzt an, der Kegelschnitt sei ein Kreis (Fig. 176), d. h. der Ort des Scheitels eines rechten

Fig. 176.



Winkels AMB, dessen Schenkel AM und BM sich um zwei feste Punkte A und B drehen. Diese beweglichen Schenkel erzeugen zwei gleiche und darum projectivische Büschel; also wird die Tangente in A derjenige Strahl des ersten Büschels

sein, welcher dem Strahl BA des zweiten Büschels entspricht (107). Die Tangente in A muss also mit BA einen rechten Winkel bilden; ebenso wird die Tangente in B auf AB senkrecht stehen. Da die Tangenten in A und B parallel sind, so ist AB ein Durchmesser und der Punkt O, die Mitte von AB, ist der Mittelpunkt des Kreises (210).

Da AB ein Durchmesser ist, so werden die Geraden AM und BM die Richtungen von zwei conjugirten Durchmessern haben, welches auch die Stellung des Punktes M sein mag (215); also:

Zwei conjugirte Durchmesser des Kreises stehen immer senkrecht aufeinander.

Da die Diagonalen jedes dem Kreis umschriebenen Parallelogramms conjugirte Durchmesser sein müssen, so schneiden sie sich unter einem rechten Winkel; also ist jedes einem Kreis umschriebene Parallelogramm ein Rhombus. In einem Rhombus ist der Abstand von zwei Gegenseiten gleich demjenigen der beiden andern; wenn wir also in dem umschriebenen Rhombus zwei Gegenseiten verändern, indem wir die beiden andern festhalten, so sehen wir, dass der Abstand von zwei parallelen Tangenten constant ist. Der Abstand von zwei parallelen Tangenten ist diejenige Gerade, welche ihre Berührungspunkte verbindet; denn diese Gerade die ein Durchmesser ist, schneidet den conjugirten Durchmesser und die ihm parallelen Tangenten unter rechten Winkeln; also sind alle Durchmesser gleich.

Die Diagonalen jedes eingeschriebenen Parallelogramms sind Durchmesser, diese sind aber alle gleich, folglich sind alle eingeschriebenen Parallelogramme Rechtecke.

218. Hat man in irgend einem Kegelschnitt (Fig. 172) eine beliebige Gerade s mit dem Pol S, so werden die mit s parallelen Sehnen von dem durch S gehenden Durchmesser halbirt; denn S und der unendlich ferne Punkt von s sind reciproke Punkte, also geht die Polare des zweiten Punktes durch den ersten. Wir können auch sagen:

Ist ein Durchmesser demjenigen zugeordnet, der

durch einen gegebenen Punkt geht, so ist er parallel zu der Polaren dieses Punktes.

I. Schneidet der durch S gehende Durchmesser den Kegelschnitt in zwei Punkten M und M′, so werden diese durch den Pol S und die Polare *s* harmonisch getrennt *); ist also O die Mitte von MM′ oder der Mittelpunkt des Kegelschnittes und R der Schnittpunkt dieses Durchmessers und der Polaren *s*, so haben wir (56)

$$OS \, . \, OR = \overline{OM}^2.$$

II. Daraus folgt eine Construction des halben conjugirten Durchmessers der Sehne AA′ eines Kegelschnittes, von welchem man noch drei andere Punkte gibt. Wir suchen den Mittelpunkt O (213) und verbinden ihn mit der Mitte von AA′; hierauf construiren wir die Tangente in A, welche OR in S trifft und nehmen die mittlere Proportionale OM zwischen OR und OS; OM wird der gesuchte halbe Durchmesser sein.

Befindet sich O zwischen R und S, so dass OR und OS verschiedene Vorzeichen haben, so trifft der Durchmesser OR die Curve nicht; aber auch in diesem Falle wird die Länge OM, d. i. die mittlere Proportionale zwischen OR und OS, der Werth des halben conjugirten Durchmessers der Sehne AA′ genannt.

Eine entsprechende Definition kann für eine beliebige Gerade gegeben werden (223).

III. Ist der Kegelschnitt ein Kreis, so erhalten wir wegen der rechtwinkligen Lage der conjugirten Durchmesser (217) den Satz:

Die Polare eines beliebigen Punktes in Bezug auf den Kreis steht senkrecht auf dem durch den Pol gehenden Durchmesser.

219. Aus dieser letzteren Eigenschaft kann man einen sehr wichtigen Lehrsatz ableiten. Betrachten wir die Punkte A, B, C, ... einer geraden Punktreihe *s* als Pole (Fig. 177); die Durchmesser O (A, B, C ...), welche sie aus dem Centrum

*) Apollonius, loc. cit., I, 34, 36; II, 29, 30.

O des Kegelschnittes projiciren, werden einen Büschel bilden, der zu der Punktreihe perspectivisch ist. Ein anderer Büschel wird von den Geraden a, b, c... den Polaren zu A, B, C,... gebildet, denn diese letzteren gehen alle (190) durch

Fig. 177.

denselben Punkt S, welcher der Pol von s ist und da nach der obigen Eigenschaft (wenn der Kegelschnitt ein Kreis ist) die Geraden O (A, B, C,...) beziehungsweise auf a, b, c,... senkrecht stehen, so sind die beiden Büschel gleich. Die Punktreihe der Pole A, B, C,... ist also projectivisch zu dem Büschel der Polaren a, b, c...

Dieser Schluss ist nicht nur für den Kreis, sondern ebenso für jeden andern Kegelschnitt wahr. Denn ein beliebig gegebener Kegelschnitt kann als Projection eines Kreises angesehen werden (113, 114); in der Projection entsprechen den harmonischen Gebilden eben solche Gebilde (44); einem Punkt und seiner Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt entsprechen ein Punkt und seine Polare in Bezug auf den Kreis und umgekehrt, einer Punktreihe von Polen und dem Büschel ihrer Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt werden eine Punktreihe von Polen und der Büschel ihrer Polaren in Bezug auf den Kreis entsprechen; aber diese Punktreihe und dieser Büschel sind projectivisch, oder:

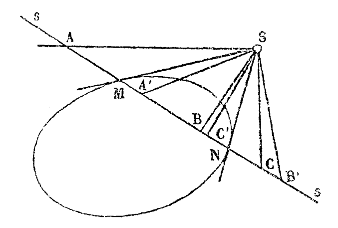
Die von einer beliebigen Anzahl von Polen gebildete gerade Punktreihe und der Büschel ihrer Polaren in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt sind zwei projectivische Gebilde *).

---

*) Möbius, loc. cit., S. 445.

220. Die Punkte A, B, C,... mögen einer Geraden s angehören (Fig. 178); ihre Polaren, die alle durch einen festen Punkt S, den Pol von s, gehen, sollen die Geraden a, b, c,...

Fig. 178.



sein; die Schnittpunkte dieser Geraden a, b, c,... mit s sollen A', B', C',... heissen. Da A und A' reciproke Punkte sind, so wird die Polare von A' durch A gehen und zwar wird es eben die Gerade SA sein, weil S zu jedem Punkt von s reciprok ist. Der Büschel $a\,b\,c$... ist projectivisch zu der Punktreihe ABC... (219) und perspectivisch zu der Punktreihe A'B'C'...; also sind diese beiden Punktreihen projectivisch. In diesen beiden Punktreihen aber entsprechen sich zwei Punkte wie A und A' doppelt; denn betrachten wir A' als einen Punkt der ersten Reihe, so schneidet seine Polare, das ist SA, die Gerade s im Punkte A. Also bilden die Paare der reciproken Punkte AA', BB', CC',... eine Involution (93) *). Hat die Involution zwei Doppelpunkte, so wird jeder derselben (z. B. M) ein reciproker Punkt zu sich selbst, also der Art sein, dass seine Polare durch den Pol selbst geht; also wird (188) M ein Punkt der Curve und SM die Tangente in diesem Punkte sein.

Die Paare der Geraden $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$,... der Polaren der Punkte AA', BB', CC',... bilden eine Involution, einmal vermöge des Lehrsatzes von Nr. 219; dann aber auch, weil diese Geraden jene Punkte aus dem Centrum S projiciren, d. h.:

*) Man setzt voraus, dass s keine Tangente an den Kegelschnitt sei. Wäre s Tangente, so würden, da A, B, C,... beliebige Punkte dieser Geraden sind, die Punkte A', B', C',... alle mit dem Berührungspunkte S zusammenfallen.

Eine beliebige Gerade (die nicht Tangente an den Kegelschnitt ist) enthält eine unendliche Anzahl von Paaren reciproker Punkte, die eine Involution bilden.

Schneidet die Gerade den Kegelschnitt, so sind die beiden Schnittpunkte die Doppelpunkte der Involution. Der Centralpunkt der Involution liegt auf demjenigen Durchmesser, der durch den Pol der gegebenen Geraden geht (218).

Durch einen beliebigen Punkt (der nicht auf dem Kegelschnitt liegt) geht eine unendliche Anzahl von Paaren reciproker Geraden, welche eine Involution bilden.

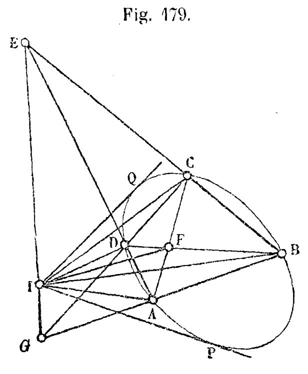
Ist der Punkt ausserhalb der Curve, so sind die durch ihn gehenden Tangenten die Doppelstrahlen der Involution, d. h. (96):

Zwei Tangenten und zwei reciproke Geraden, die von demselben Punkte ausgehen, bilden einen harmonischen Büschel.

Ist der gegebene Punkt unendlich ferne, so hat man eine Involution von parallelen, paarweise reciproken Geraden; ihr Centralstrahl ist ein Durchmesser der Curve (99).

221. In Figur 179 sei A B C D ein einfaches, dem Kegelschnitt eingeschriebenes Viereck, F der Schnittpunkt der Diagonalen A C und B D, E und G die Schnittpunkte der Paare der Gegenseiten, so werden die Punkte E, F und G paarweise

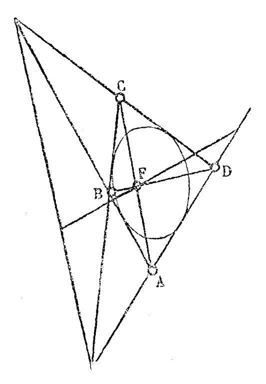
Fig. 179.



reciproke Punkte sein (193). Aus einem beliebigen Punkte I von EG ziehen wir die Tangenten IP und IQ an den Kegelschnitt und projiciren auch die Eckpunkte des Vierecks. Die beiden Tangenten sind durch IE und IF harmonisch getrennt, denn diese Geraden sind reciprok, weil F der Pol von IE ist (220). Die Geraden IE und IF bilden auch mit IA und IC eine harmonische Gruppe, denn die Diagonale AC des von den Geraden AB, BC, CD und DA gebildeten vollständigen Vierseits wird durch die beiden andern Diagonalen BD und EG harmonisch getheilt, und diese vier Strahlen sind gerade diejenigen, welche die vier harmonischen Punkte von AC aus dem Centrum I projiciren. Aus demselben Grunde trennen auch die Geraden IE und IF die Geraden IB und ID harmonisch. Die beiden Tangenten, die Geraden IA, IC und die Geraden IB, ID sind also drei Paare conjugirter Geraden derselben Involution, deren Doppelstrahlen IE und IF sind (96). Oder:

Lehrsatz. Ist ein Viereck einem Kegelschnitt eingeschrieben und zieht man aus einem Punkte derjenigen Geraden, welche die Schnittpunkte der Paare der

Fig. 180.



Gegenseiten verbindet, die Tangenten an die Curve und projicirt aus diesem Punkte die beiden Paare der Gegenecken, so erhält man drei Paare conjugirter Strahlen einer Involution.

I. Nach der Folgerung aus dem Lehrsatz von Desargues (143, rechts) ist es möglich, in das Vierseit ABCD einen Kegelschnitt zu beschreiben, der die Geraden IP und IQ berührt.

II. Die Folgerung zu dem eben bewiesenen Lehrsatz kann so ausgedrückt werden:

Ist ein einfaches Vierseit A B C D einem Kegelschnitt umschrieben (Fig. 180) und zieht man durch den Schnittpunkt seiner Diagonalen eine beliebige Transversale, so trifft sie die Curve und die beiden Paare der Gegenseiten A B und C D, B C und A D in drei Paaren conjugirter Punkte einer Involution.

III. Vermöge des Lehrsatzes von Desargues (143, links) kann man durch die beiden Schnittpunkte des Kegelschnittes und der Transversalen und durch die vier Eckpunkte des Vierseits einen Kegelschnitt legen *).

222. Die Theorie der reciproken Punkte gibt eine Auflösung der Aufgabe:

Die Durchschnitte eines durch fünf Punkte oder fünf Tangenten bestimmten Kegelschnittes mit einer gegebenen Geraden s zu construiren.

Man nimmt auf s zwei Punkte U und V, construirt ihre Polaren u, v (191), welche s in U′ und V′ treffen. Hat die durch die Paare der reciproken Punkte U U′ und V V′ bestimmte Involution zwei Doppelpunkte M und N, so werden diese die gesuchten Schnittpunkte des Kegelschnittes mit s sein *1).

Durch ein correlatives Verfahren wird die Aufgabe gelöst: Durch einen gegebenen Punkt S die Tangenten an die durch fünf Tangenten oder fünf Punkte bestimmte Curve zu legen.

223. Zwei reciproke Punkte auf der Geraden s mögen A und A′ heissen; O sei der Schnittpunkt von s mit dem durch den Pol S gehenden Durchmesser (es ist der conjugirte Durchmesser zu den zu s parallelen Sehnen); O wird der Centralpunkt der Involution sein, welche auf s durch die Paare der reciproken Punkte gebildet wird; folglich ist

$$OA \,.\, OA' = \text{const. } (96).$$

Schneidet s den Kegelschnitt in zwei Punkten M und N, so werden diese Punkte die Doppelelemente der Involution sein und man erhält:

$$OA \,.\, OA' = \overline{OM}^2 = \overline{ON}^2.$$

---

*) Chasles, Sections coniques, Nr. 122 und 126.

*1) Staudt, Geometrie der Lage, Nr. 305.

Schneidet die Gerade s die Curve nicht, so wird der constante Werth von $OA . OA'$ negativ sein (96); in diesem Falle gibt es zwei conjugirte Punkte der Involution H und H' oder in Bezug auf den Kegelschnitt zwei reciproke Punkte, deren Mitte der Punkt O ist und

$$OA . OA' = OH . OH' = -\overline{OH}^2 = -\overline{OH'}^2.$$

Das Segment HH' heisst die ideelle Sehne des Kegelschnittes *); im ersten Falle dagegen ist MN eine reelle Sehne. Nach dieser Definition kann man sagen, dass ein Durchmesser die Mittelpunkte aller reellen und ideellen Sehnen enthalte, die dem conjugirten Durchmesser parallel sind.

Haben zwei Kegelschnitte eine reelle Sehne MN gemeinschaftlich, so ist damit gesagt, dass beide durch die Punkte M und N gehen. Sagt man dagegen, dass die beiden Kegelschnitte eine ideelle Sehne HH' gemeinschaftlich haben, so bedeutet das so viel, dass die Punkte H und H' in Bezug auf beide Kegelschnitte reciproke Punkte sind und dass beide Durchmesser der zwei Kegelschnitte, welche die Pole von HH' enthalten, durch die Mitte von HH' gehen.

224. Ein involutorischer Strahlenbüschel hat im Allgemeinen (163) ein Paar rechtwinkliger conjugirter Strahlen; oder:

Durch einen beliebigen Punkt kann man immer ein Paar rechtwinklige reciproke Gerade ziehen, welche die Winkel der von dem gegebenen Punkte ausgehenden Tangenten halbiren, wenn jener Punkt ausserhalb der Curve liegt.

225. Nehmen wir jetzt statt des beliebigen Punktes S den Mittelpunkt O des Kegelschnittes (Hyperbel oder Ellipse); zwei reciproke Geraden werden zwei conjugirte Durchmesser sein; folglich (220):

Die Paare conjugirter Durchmesser bilden eine Involution. Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so sind die Asymptoten die Doppelstrahlen der Involution; damit ist auch

*) Poncelet, loc. cit., S. 29.

gesagt, dass zwei conjugirte Durchmesser der Hyperbel immer durch die Asymptoten harmonisch getrennt sind*). Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, so hat die Involution keine Doppelstrahlen.

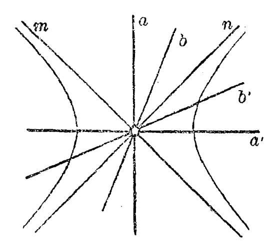
Betrachten wir zwei Paare conjugirter Elemente in einer Involution; das eine Paar ist entweder durch das andere getrennt oder nicht, folglich hat entweder die Involution ihre Doppelelemente oder sie hat keine solchen (98); oder:

Von zwei Paaren conjugirter Durchmesser der Ellipse ist immer das eine aa' durch das andere bb' getrennt (Fig. 175);

Von zwei Paaren conjugirter Durchmesser der Hyperbel ist das eine aa' niemals durch das andere bb' getrennt (Fig. 181).

226. Die Involution der conjugirten Durchmesser wird (224) ein Paar rechtwinklige conjugirte Durchmesser enthalten. Gäbe es noch ein zweites Paar, so stünde jeder Durchmesser auf seinem conjugirten senkrecht (163) und liesse man in diesem Falle den Scheitel eines Winkels, dessen Schenkel durch die festen Endpunkte eines Durchmessers gehen, auf der Curve hingleiten, so wäre dieser Winkel immer ein Rechter (215), der Kegelschnitt wäre also ein Kreis.

Fig. 181.



Jeder Kegelschnitt also, der weder eine Parabel noch ein Kreis ist, hat ein einziges Paar rechtwinkliger conjugirter Durchmesser. Man nennt diese beiden Durchmesser aa' die

*) De la Hire, loc. cit., Buch II, S. 13, Corr. 4.

Axen (Fig. 175 und 181). In der Hyperbel halbiren die Axen (225, 52) die Winkel der Asymptoten m, n (Fig. 181).

Betrachtet man eine Axe als einen Durchmesser, der die darauf senkrechten Sehnen halbirt, so hat auch die Parabel eine Axe. Weil nämlich die auf der gemeinsamen Richtung aller Durchmesser senkrechten Sehnen zu einander parallel sind, so liegen ihre Mittelpunkte auf einer Geraden (206), welche die Axe der Parabel ist (Fig. 173).

227. Wenn fünf Punkte eines Kegelschnittes gegeben sind, so wird man den Mittelpunkt O und zwei Paare conjugirter Durchmesser $u\,u'$, $v\,v'$ construiren können, wie in Nr. 213 gezeigt wurde. Ist das eine Paar durch das andere getrennt, so wird der Kegelschnitt eine Ellipse sein; im entgegengesetzten Falle ist er eine Hyperbel (225). Construirt man in diesem zweiten Falle die Doppelstrahlen der durch die Paare $u\,u'$ und $v\,v'$ bestimmten Involution, so werden diese Doppelstrahlen die Asymptoten der Curve sein.

Construirt man (163) im einen wie im andern Falle die rechtwinkligen conjugirten Strahlen der Involution, so wird man die Axen des Kegelschnittes bekommen.

Man kann auch die Richtung der Axen finden, ohne vorher den Mittelpunkt und die Paare der conjugirten Durchmesser zu construiren *). Zu diesem Zwecke beschreibt man den Kreis A B C und construirt (176, I) den vierten Schnittpunkt C′ dieser Curve mit dem durch die fünf gegebenen Punkte A, B, C, F, G bestimmten Kegelschnitt (Fig. 156). Eine beliebige Transversale wird die beiden Curven und die Paare der Gegenseiten des gemeinsamen eingeschriebenen Vierecks A B C C′ in solchen Punkten schneiden, welche Paare einer Involution bilden (143). Die Doppelpunkte P und Q dieser Involution, wenn es solche gibt, werden in Bezug auf beide Curven reciprok sein (96, 220), d. h. sie werden das gemeinsame Paar (164) derjenigen beiden Involutionen sein, welche von den reciproken Punkten in Bezug auf den Kreis und von den reciproken Punkten in Bezug auf den Kegelschnitt auf der Transversalen gebildet werden (220). Stellen wir uns vor, man habe die unendlich ferne Gerade als Transversale genommen. Da diese Gerade den Kreis nicht schneidet, so wird

*) Poncelet, loc. cit., Nr. 394.

wenigstens eine dieser beiden Involutionen keine Doppelpunkte haben, folglich (164) sind die Punkte P und Q wirklich vorhanden. Da diese Punkte unendlich ferne und in Bezug auf beide Curven reciprok sind, so werden sie (206, 212) die Pole von zwei conjugirten Durchmessern des Kreises und auch von zwei conjugirten Durchmessern des Kegelschnittes sein; die conjugirten Durchmesser des Kreises sind aber rechtwinklig (217), also sind P und Q die Pole der Axen des Kegelschnittes. Dieselben Punkte P und Q sind auch durch jedes Paar der Gegenseiten des Vierecks A B C C′ harmonisch getrennt; daraus folgt, dass P und Q die unendlich fernen Punkte der Halbirungslinien derjenigen Winkel sind, welche von den Paaren der Gegenseiten gebildet werden (53). Um also die gesuchten Richtungen der Axen zu erhalten, hat man nur die Halbirungslinien von einem Paar Gegenseiten des Vierecks A B C C′ (von dem Paar A B und C C′ zum Beispiel) zu ziehen (Fig. 156).

228. Setzen wir voraus, man habe ein vollständiges Vierseit $qrst$ und einen beliebigen Punkt S (Fig. 149). Wir haben schon gesehen (145, rechts), dass die Strahlenpaare aa', bb', welche aus S zwei Paare von Gegenecken projiciren, eine Involution bestimmen, in welcher die aus S an irgend einen dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitt gezogenen Tangenten conjugirte Strahlen sind. Nehmen wir an, die Involution habe zwei Doppelstrahlen m und n; sie werden dieses Tangentenpaar harmonisch trennen (96), folglich sind diese Doppelstrahlen in Bezug auf den Kegelschnitt reciproke Geraden. Daraus folgt (170, rechts):

Gehen zwei Kegelschnitte, die einem gegebenen Vierseit eingeschrieben sind, durch einen gegebenen Punkt, so sind ihre Tangenten in diesem Punkte in Bezug auf alle, demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte reciprok.

Statt einen Punkt S willkürlich zu nehmen, können wir die Gerade m als gegeben voraussetzen; geht diese Gerade durch keinen Eckpunkt des Vierseits, so wird es einen einzigen Kegelschnitt geben, der die fünf Geraden m, q, r, s, t berührt (116).

Dieser Kegelschnitt berühre m im Punkte S, so wird durch S ein zweiter Kegelschnitt gehen, der dem Vierseit eingeschrieben ist; seine Tangente in S sei n. Die Geraden m und n werden also in Bezug auf alle dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte reciprok sein; oder (189):

Die Pole einer beliebigen Geraden m in Bezug auf alle demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte liegen auf einer andern Geraden n.

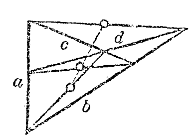
I. Da die Geraden m und n die Doppelstrahlen der Involution sind, in welcher die aus S an zwei Gegenecken gezogenen Strahlen conjugirt sind, so theilen die Geraden m und n jede Diagonale des Vierseits harmonisch.

II. Die correlativen Sätze heissen:

Berührt eine Gerade zwei demselben Vierseit umschriebene Kegelschnitte, so sind die beiden Berührungspunkte in Bezug auf alle, demselben Vierseit umschriebenen Kegelschnitte reciprok.

Die Polaren eines gegebenen Punktes M in Bezug auf alle, demselben Viereck umschriebenen Kegelschnitte, gehen

Fig. 182.



durch einen festen Punkt N. Die beiden Punkte M und N trennen jedes Paar der Gegenseiten des vollständigen Vierecks harmonisch.

III. Setzen wir im ersten Lehrsatze voraus, dass die Gerade m unendlich fern sei, so werden die Pole von m die Mittelpunkte der Kegelschnitte sein (210) oder:

Die Mittelpunkte aller, demselben Vierseit eingeschriebenen, Kegelschnitte liegen auf einer Geraden (Fig. 182); diese Gerade geht durch die Mitten der Diagonalen des Vierseits *).

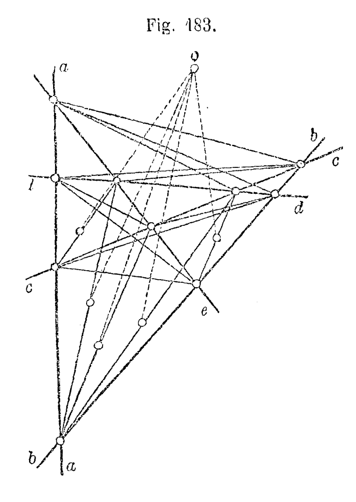
*) Newton, loc. cit., Buch I, Lemma 25, Zus. 3.

IV. Nehmen wir im zweiten Lehrsatze an, es sei auch der Punkt M unendlich fern; die Polaren von M werden die conjugirten Durchmesser von denjenigen sein, die M zum unendlich fernen Punkte haben; oder:

In allen den Kegelschnitten, die einem festen Viereck umschrieben werden, gehen die Durchmesser, die zu einem der Richtung nach gegebenen conjugirt sind, durch einen festen Punkt.

229. Der Lehrsatz von Newton (228) liefert ein einfaches Hülfsmittel, den Mittelpunkt eines Kegelschnittes zu finden, von welchem fünf Tangenten a, b, c, d, e gegeben sind (Fig. 183). Die vier Tangenten a, b, c, d bilden ein Vierseit; verbinden wir

Fig. 183.



die Mitten seiner Diagonalen und operiren ebenso an dem Vierseit $abce$; die beiden so erhaltenen Geraden schneiden sich in dem gesuchten Mittelpunkte O.

Verwendet man je vier von den fünf Tangenten, so erhält man fünf Vierseite; die fünf Geraden, welche durch die Mitten der Diagonalen eines jeden Vierseits gehen, treffen also alle im Mittelpunkte O desjenigen Kegelschnittes zusammen, der dem Fünfseit $abcde$ eingeschrieben wird.

Derselbe Lehrsatz dient dazu, die Richtung des Durchmessers der Parabel zu construiren, welche durch vier Tangenten a,

b, c, d bestimmt ist. Denn der unendlich ferne Punkt der Geraden, welche die Mittelpunkte der Diagonalen des Vierseits $a\,b\,c\,d$ enthält, wird der Pol der unendlich fernen Geraden sein in Bezug auf einen, demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitt (228); er ist also der unendlich ferne Punkt der eingeschriebenen Parabel. Diese gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte ist also selbst ein Durchmesser der Parabel (Fig. 182).

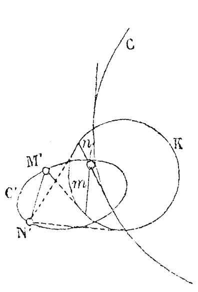
§ 22. **Reciprok-polare Figuren.**

230. Ist ein Fundamental-Kegelschnitt **K** gegeben und beschreibt ein veränderlicher Pol eine Gerade, so dreht sich seine Polare, wie wir schon (190) gesehen haben, um einen bestimmten Punkt und umgekehrt, dreht sich eine als Polare betrachtete Gerade um einen festen Punkt, so durchläuft sein Pol eine bestimmte Gerade.

Betrachten wir jetzt alle Tangenten einer gegebenen Curve **C** als Polaren oder stellen uns vor, dass die bewegliche Polare die gegebene Curve umhülle. Ihr Pol wird eine andere Curve beschreiben, welche wir mit **C**′ bezeichnen wollen. Die Punkte von **C**′ sind also die Pole der Tangenten an **C**.

Ich behaupte nun, dass umgekehrt die Punkte von **C** auch die Pole der Tangenten an **C**′ sind. Denn sind M′ und

Fig. 184.



N′ zwei Punkte von **C**′ (Fig. 184), so werden ihre Polaren m und n zwei Tangenten an **C** und der Schnittpunkt $m\,n$ wird der Pol der Sehne M′N′ sein (190). Nehmen wir an, der Punkt N′ nähere sich unaufhörlich dem Punkte M′; dann

wird die Sehne M′N′ immer mehr in die Lage der Tangente in M′ an die Curve **C**′ rücken; die Gerade n wird sich gleichzeitig immer mehr der Lage von m nähern und der Schnittpunkt mn rückt immer mehr auf den Punkt zu, in welchem m die Curve **C** berührt. Ist endlich die Entfernung M′N′ unendlich klein geworden, so wird die Tangente in M′ an **C**′ die Polare des Berührungspunktes von m und **C** geworden sein. Gleichwie also die Tangenten von **C** die Polaren der Punkte von **C**′ sind, so sind auch die Tangenten von **C**′ die Polaren der Punkte von **C**; berührt eine Gerade m die Curve **C** in M, so ist der Pol M′ von m ein Punkt der Curve **C**′ und die Polare m' von M ist eine Tangente an die Curve **C**′ im Punkte M′.

Zwei Curven **C** und **C**′ der Art, dass jede derselben der Ort der Pole der Tangenten und gleichzeitig auch die Umhüllungscurve der Polaren der Punkte der andern ist, heissen reciprok-polar.

231. Eine beliebige Gerade r trifft eine der reciproken Curven in μ Punkten; die Polaren dieser Punkte sind ebenso viele von dem Pole R′ der Geraden r ausgehende Tangenten an die andere Curve. Die zweite Curve hat also ebenso viele von einem gegebenen Punkte R′ ausgehende Tangenten, als die erste Curve Schnittpunkte mit der Geraden r, der Polaren von R′ hat und umgekehrt.

232. Setzen wir jetzt voraus, die Curve **C** sei ein Kegelschnitt, a und b zwei seiner Tangenten; sie werden von allen anderen Tangenten c, d, e,... in entsprechenden Punkten von zwei projectivischen Punktreihen geschnitten (113). Mit andern Worten, wir betrachten **C** als Umhüllungscurve der Geraden c, d, e,... welche die entsprechenden Punkte von zwei projectivischen Punktreihen a und b verbinden (114).

Die Curve **C**′ wird die Pole A′, B′, C′, D′, E′,... der Tangenten a, b, c, d, e,... von **C** enthalten. Die Geraden A′ (C′, D′, E′,...) werden die Polaren der Punkte a (c, d, e,...) sein und werden einen Büschel bilden, der zu der Reihe a

der Pole projectivisch ist; ebenso werden die Geraden B′ (C′, D′, E′,...) die Polaren der Punkte b (c, d, e,...) sein und einen Büschel bilden, der zu der Punktreihe b der Pole projectivisch ist (219). Die beiden Punktreihen a ($c.d.e...$) und b ($c.d.e...$) sind aber projectivisch, also sind es auch die Büschel A′ (C′.D′.E′...) und B′ (C′.D′.E′...). Daraus folgt, dass **C**′ der Ort des Schnittpunktes der entsprechenden Strahlen von zwei projectivischen Büscheln ist oder auch (114):

Die reciprok-polare Curve eines Kegelschnittes ist ein zweiter Kegelschnitt.

233. Ist ein Fundamental-Kegelschnitt **K** und ein anderer Kegelschnitt **C** gegeben, dessen reciprok-polare Curve **C**′ bestimmt werden soll, so kann man fragen, ob **C**′ eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel sei. Die unendlich ferne Gerade ist die Polare des Centrums O von **K**, also entsprechen den unendlich fernen Punkten von **C**′ diejenigen Tangenten von **C**, welche von O ausgehen. Daraus folgt, dass der Kegelschnitt **C**′ eine Ellipse oder eine Hyperbel sein wird, je nachdem der Punkt O innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnittes **C** liegt; **C**′ wird eine Parabel sein, wenn O ein Punkt von **C** ist.

Ist A der Pol einer Geraden a in Bezug auf **C** und a' die Polare von A und A′ der Pol von a in Bezug auf **K**, so wird A′ der Pol von a' in Bezug auf **C**′ sein, weil einer harmonischen Gruppe von vier Polen eine harmonische Gruppe von vier Polaren entspricht (219) und umgekehrt. Also wird der Mittelpunkt M′ von **C**′ in Bezug auf **K** der Pol der Geraden m sein, welche in Bezug auf **C** die Polare von O ist. Zwei conjugirte Durchmesser von **C**′ werden zwei Punkten von m entsprechen, die in Bezug auf **C** reciprok sind etc.

234. Setzen wir voraus, man gebe in der Ebene des Fundamental-Kegelschnittes eine Figur (1) oder irgend eine Zusammenstellung von Punkten, Geraden und Curven und construiren wir zu jedem Punkte ihre Polare, zu jeder Ge-

raden ihren Pol und zu jeder Curve ihre reciprok-polare Curve. So erhalten wir eine neue Figur. Die beiden Figuren heissen reciprok-polare Figuren, weil jede von ihnen die Pole der Geraden der andern, die Polaren der Punkte der andern und die polaren Curven der Curven der andern enthält.

Zwei reciprok-polare Figuren sind nach dem Gesetz der Dualität in der ebenen Geometrie (27) correlative Figuren; denn jedem Punkte der einen entspricht eine Gerade der andern, jeder Punktreihe der ersten entspricht ein Büschel der zweiten. Sie liegen auch in derselben Ebene; ihre Lagen in dieser sind bestimmt, können aber vertauscht werden, weil jeder Punkt der einen Figur und die entsprechende Gerade der andern an die Bedingung gebunden sind, dass sie in Bezug auf einen festen Kegelschnitt Pol und Polare sein müssen. Man sagt, dass sie involutorisch liegen. Zwei Figuren, die nur nach dem Gesetz der Dualität correlativ sind, haben dagegen in Bezug auf ihre Lage keinerlei Zusammenhang *).

235. Enthält eine der beiden reciprok-polaren Figuren eine Punktreihe (von Polen), so schliesst die andere einen Büschel (von Polaren) ein und diese beiden entsprechenden Gebilde sind projectivisch (219). Wenn also die Punkte der Punktreihe Paare einer Involution bilden, so sind auch die Strahlen des entsprechenden Büschels involutorisch und den Doppelpunkten der ersten Involution werden die Doppelstrahlen der zweiten entsprechen (95). Gibt es einen Kegelschnitt in der einen Figur, so gibt es auch einen solchen in der andern (232); den Punkten des ersten Kegelschnittes werden die Tangenten des zweiten und den Tangenten des ersten die Punkte des zweiten entsprechen; den eingeschriebenen Polygonen der einen Figur werden die umschriebenen Polygone der andern entsprechen (230). Zeigt die erste Figur den Beweis eines Lehrsatzes oder die Auflösung einer Aufgabe, so wird die zweite den Beweis des correlativen Lehrsatzes oder

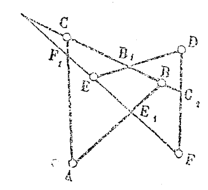
*) Steiner, loc. cit., S. VII der Vorrede. Ges. W. p. 234.

die Auflösung der correlativen Aufgabe versinnlichen, welche man erhält, indem man die Elemente „Punkt" und „Gerade" vertauscht.

236. Lehrsatz. Die Eckpunkte von zwei Poldreiecken eines Kegelschnittes sind Punkte eines zweiten und ihre Seiten sind Tangenten eines dritten Kegelschnittes *).

In Fig. 185 seien A B C und D E F in Bezug auf den Fundamental-Kegelschnitt **K** zwei Poldreiecke (192); wir beweisen

Fig. 185.



zuerst, dass zwei von den sechs Seiten die vier übrigen in zwei projectivischen Gruppen von je vier Punkten schneiden.

Die Seite B C trifft D E und D F in B_1 und C_1 und die Seite E F trifft A B und A C in E_1 und F_1. Die Punkte B und C sind die Pole der Geraden C A und A B; der Schnittpunkt B_1 von B C und D E hat zur Polaren die Gerade A F, welche ihre Pole verbindet; ebenso hat der Schnittpunkt C_1 von B C und D F die Polare A E. Die Gruppe der vier Pole B, C, B_1, C_1 ist also (219) zu der Gruppe der vier Polaren A (C, B, F, E) projectivisch, sie ist also auch zu der Gruppe derjenigen Punkte $F_1 E_1 F E$ projectivisch, in welchen diese vier Geraden von der Transversalen E F geschnitten werden. So hat man

$$(B C B_1 C_1) = (F_1 E_1 F E)$$

oder (38)

$$(B C B_1 C_1) = (E_1 F_1 E F),$$

diese Gleichung beweist die Projectivität der beiden Gruppen von je vier Punkten, in welchen die Geraden B C und E F von A B, C A, D E und F D geschnitten werden. Diese sechs

*) Steiner, loc. cit., S. 308, § 60, 46. — Chasles, loc. cit. Nr. 215.

Geraden sind die sechs Seiten der gegebenen Dreiecke, sind also (114, II') Tangenten an einen und denselben Kegelschnitt 𝕮.

Die Pole dieser sechs Geraden sind die sechs Eckpunkte derselben Dreiecke; also sind (232) diese sechs Eckpunkte Punkte eines und desselben Kegelschnittes 𝕮', welcher in Bezug auf den Fundamental-Kegelschnitt 𝕶 zu 𝕮 reciprok-polar ist.

I. Man kann diesen Lehrsatz auch so ausdrücken: Berührt der Kegelschnitt 𝕮 fünf von den sechs Seiten zweier Poldreiecke eines und desselben Kegelschnittes 𝕶, so berührt er auch die sechste Seite; und der durch fünf Eckpunkte bestimmte Kegelschnitt geht auch durch den sechsten.

Daraus schliesst man: berührt ein Kegelschnitt 𝕮 die Seiten eines Poldreiecks $a\,b\,c$ eines andern Kegelschnittes 𝕶, so gibt es unendlich viele andere Poldreiecke dieser letzteren Curve, die der ersteren umschrieben sind. Denn ist d eine beliebige Tangente an 𝕮, so ziehen wir aus D, dem Pol von d in Bezug auf 𝕶, eine zweite Tangente e an 𝕮; ist dann f in Bezug auf 𝕶 die Polare des Punktes $d\,e$, so wird $d\,e\,f$ ein Poldreieck zu 𝕶 sein (193). Da nun 𝕮 schon fünf Seiten a, b, c, d, e zweier Poldreiecke der Curve 𝕶 berührt, so muss 𝕮 auch die sechste Seite f berühren; was zu beweisen war. Kann man aus dem Punkte D zwei Tangenten e' und f' an 𝕶 legen, so werden die vier Geraden e, f, e', f' eine harmonische Gruppe bilden, weil die Geraden e und f in Bezug auf 𝕶 reciprok sind (220); die Geraden e' und f' sind also reciprok in Bezug auf 𝕮.

Der Ort des Punktes D ist der Kegelschnitt 𝕮', d. i. die reciprok-polare Curve von 𝕮 in Bezug auf 𝕶; folglich:

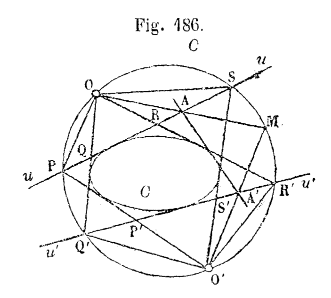
Ist ein Kegelschnitt 𝕮 einem Poldreieck eines andern Kegelschnittes 𝕶 eingeschrieben, so ist der Ort desjenigen Punktes, aus welchem ein harmonischer Büschel von vier Tangenten an die beiden Curven 𝕮 und 𝕶 gezogen werden kann, ein dritter Kegelschnitt 𝕮', welcher in Bezug auf 𝕶 die reciprok-polare Curve von 𝕮 ist.

II. Entsprechend können wir auch sagen: geht ein Kegelschnitt 𝕮' durch die Eckpunkte eines Poldreiecks eines anderen Kegelschnittes 𝕶, so ist er auch einer unbeschränkten Anzahl anderer Poldreiecke desselben Kegelschnittes 𝕶 umschrieben; und diejenigen Geraden, welche 𝕮' und 𝕶 in zwei Paaren entsprechender harmonischer Punkte schneiden, sind alle Tangenten an

denselben Kegelschnitt $\mathfrak{C}$, welcher in Bezug auf $\mathfrak{K}$ die reciprok-polare Curve von $\mathfrak{C}'$ ist.

237. Betrachten wir einen Kegelschnitt **C** und zwei umschriebene Dreiecke O Q′R′ und O′P S (Fig. 186). Die beiden Tangenten P S und Q′R′ werden von den vier andern Seiten O′P, O Q′, O R′, O′S in zwei entsprechenden Gruppen P Q R S

Fig. 186.



und P′Q′R′S′ von zwei projectivischen Punktreihen u und u' geschnitten (113); folglich sind die Strahlenbüschel O (P, Q, R, S) und O′ (P′, Q′, R′, S′), welche diese Punkte beziehungsweise aus O und O′ projiciren, ebenfalls projectivisch. Die Punkte P, Q′, R′, S, in welchen sich die entsprechenden Strahlen schneiden, liegen also (114) auf einem Kegelschnitte **C′**, welcher durch die Projectionscentren O und O′ geht. Oder:

Sind zwei Dreiecke einem Kegelschnitt umschrieben, so sind sie auch einem anderen Kegelschnitt eingeschrieben.

Gehen wir dagegen von der Betrachtung des Kegelschnittes **C′** und der eingeschriebenen Dreiecke O Q′R′ und O′P S aus, so werden wir in ganz analoger (correlativer) Weise den correlativen und inversen Lehrsatz des vorhergehenden beweisen:

Sind zwei Dreiecke einem Kegelschnitt eingeschrieben, so sind sie auch einem andern Kegelschnitt umschrieben *).

I. Daraus folgt unmittelbar:

---

*) Brianchon, loc. cit., S. 35. — Steiner, loc. cit., S. 173, § 46, II.

Der Kegelschnitt, der durch fünf Eckpunkte zweier einem andern Kegelschnitt umschriebenen Dreiecke geht, geht auch durch den sechsten Eckpunkt.

Der Kegelschnitt, der fünf Seiten zweier einem andern Kegelschnitt eingeschriebenen Dreiecke berührt, berührt auch die sechste Seite.

Oder auch:

Haben zwei Kegelschnitte eine solche Lage, dass dem einen ein Dreieck eingeschrieben werden kann, welches zugleich dem andern umschrieben ist, so gibt es unzählige andere Dreiecke, welche dieselbe Eigenschaft besitzen *).

II. Wir haben in der Figur vier projectivische Gebilde: die beiden Punktreihen u und u', welche die Tangenten des Kegelschnittes **C** bestimmen und die beiden Büschel O und O′, welche die Punkte von **C**′ bestimmen; der Büschel O ist perspectivisch zu der Punktreihe u und auch der Büschel O′ liegt perspectivisch zu der Punktreihe u'. Wenn also eine beliebige Tangente von **C** die Träger u und u' in A und A′ schneidet, so treffen die Strahlen O A und O′A′ in einem Punkte M von **C**′ zusammen; wird, umgekehrt, ein Punkt M von **C**′ aus den Centren O und O′ projicirt, so werden die projicirenden Strahlen u und u' in zwei Punkten A und A′ derselben Tangente von **C** schneiden. Oder:

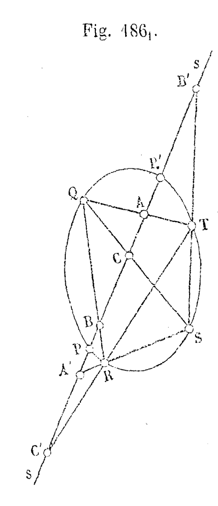
Drehen sich zwei Seiten eines veränderlichen Dreiecks A A′ M um zwei feste Punkte O und O′ eines gegebenen Kegelschnittes, während die gegenüberliegenden Eckpunkte zwei Geraden u und u' und der dritte Eckpunkt den Kegelschnitt durchlaufen, so ist die dritte Seite stets Tangente an einen bestimmten Kegelschnitt, welcher die beiden Geraden u und u' berührt.

Wenn zwei Eckpunkte eines veränderlichen Dreiecks A A′ M zwei Tangenten u und u' eines gegebenen Kegelschnittes durchlaufen, während die gegenüberliegenden Seiten sich um zwei feste Punkte O und O′ drehen und die dritte Seite obigen Kegelschnitt berührt, so durchläuft der dritte Eckpunkt einen bestimmten Kegelschnitt, welcher durch die Punkte O und O′ geht.

*) Poncelet, loc. cit., Nr. 565.

238. Nehmen wir an, es werden in einem Dreieck TRS die Seiten RS, ST, TR (Fig. 186_1) von einer Transversalen in A′, B′, C′ geschnitten und setzen voraus, dass die Polaren dieser Punkte in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt **K** (der in der Figur nicht gezeichnet ist) dieselbe Transversale in den Punkten A, B, C schneiden. Die drei Paare reciproker Punkte AA′, BB′, CC′ werden eine Involution bil-

Fig. 186_1.



den (220); folglich (103) laufen die Geraden TA, RB, SC in einem Punkte Q zusammen. Setzen wir des Weiteren voraus, es sei T reciprok zu A′ und der Punkt R reciprok zu B′, so sind TA und RB die Polaren von A′ und B′ (in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt **K**); der Schnittpunkt Q dieser Polaren wird folglich der Pol der Transversalen A′B′ sein. Nun ist C′ ein weiterer Punkt dieser Geraden und reciprok zu C; seine Polare wird QC sein; QC geht aber durch S, folglich sind auch S und C′ reciproke Punkte. Betrachten wir jetzt das von der Transversalen und den Seiten des Dreiecks TRS gebildete vollständige Vierseit, so kommen wir zu dem Lehrsatze:

Bilden die Endpunkte (T, A′), (R, B′) zweier Diagonalen eines vollständigen Vierseits zwei Paare reciproker Punkte in Bezug auf einen gegebenen

Kegelschnitt, so sind auch die Endpunkte (S, C′) der dritten Diagonale in Bezug auf denselben Kegelschnitt reciprok *).

I. Der correlative Lehrsatz möge übungsweise von dem Studirenden bewiesen werden:

Werden zwei Paare Gegenseiten eines vollständigen Vierecks von Geraden gebildet, die in Bezug auf einen Kegelschnitt reciprok sind, so sind auch die beiden andern Seiten in Bezug auf denselben Kegelschnitt reciproke Geraden.

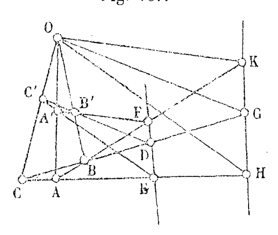
Um dieses vollständige Viereck zu erhalten, hat man nur die reciprok-polare Figur des in dem Hesse'schen Lehrsatz betrachteten Vierseits, d. h. die Figur zu nehmen, welche von den Polaren der sechs Punkte (T, A′), (R, B′), (S, C′) gebildet wird.

II. Der folgende Satz ist eine Folgerung des eben bewiesenen Lehrsatzes:

Sind zwei Dreiecke in Bezug auf einen Kegelschnitt reciprok, so sind sie collinear *1).

Es sei ABC irgend ein Dreieck (Fig. 187); die Polaren der Eckpunkte in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt

Fig. 187.



bilden ein anderes, zum ersten reciprokes Dreieck A′B′C′, d. h. die Seiten des ersten sind auch die Polaren der Eckpunkte des zweiten. E sei der Schnittpunkt der Seiten CA und C′A′ und F derjenige von AB und A′B′. Die Punkte

*) Hesse, De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis (Dissertatio pro venia legendi, Regiomonti, 1840), S. 17.

*1) Chasles, loc. cit., Nr. 135.

B und E sind reciprok, denn E liegt auf C′A′ der Polaren von B; ebenso sind die Punkte C und F reciprok. Wir haben also in dem von den Geraden BC, CA, AB und EF gebildeten Vierseit zwei Paare Gegenecken B, E und C, F, welche in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt reciproke Pole sind; folglich sind es auch die beiden andern Eckpunkte, nämlich der Punkt A und der Schnittpunkt D der Geraden BC und EF. Die Polare von A, das ist B′C′, geht also durch den Schnittpunkt D von BC und EF; mit andern Worten: die Paare der Gegenseiten der beiden Dreiecke ABC und A′B′C′ schneiden sich in drei Punkten D, E und F einer Geraden. Daraus folgt (14), dass die Verbindungslinien der Eckpunkte AA′, BB′, CC′ in einem Punkte O, dem Pol von DEF, zusammenlaufen.

III. Combinirt man diesen Lehrsatz mit demjenigen von Nr. 118, so kann man folgende Eigenschaft erkennen:

Sind zwei Dreiecke in Bezug auf einen Kegelschnitt **K** reciprok, so liegen die sechs Punkte, in welchen die Seiten des einen die nicht-entsprechenden Seiten des anderen schneiden, auf einem Kegelschnitt **C**; die sechs Geraden, welche die Eckpunkte des einen mit den nicht entsprechenden Eckpunkten des andern verbinden, sind Tangenten an einen andern Kegelschnitt **C**′, welcher in Bezug auf **K** zu **C** reciprok-polar ist (232) *); diese sechs Geraden sind in der That in Bezug auf **K** die Polaren der sechs obigen Punkte.

Ist eines der beiden Dreiecke (A′B′C′) dem andern (ABC) eingeschrieben, so fallen die drei Kegelschnitte in einen zusammen, welcher dem ersten Dreieck umschrieben, dem zweiten eingeschrieben ist (137, 139).

IV. Zwei collineare Dreiecke ABC und A′B′C′ sind gegeben; man soll denjenigen Kegelschnitt construiren, in Bezug auf welchen sie reciprok sind. Um die Punkte zu erhalten, in welchen dieser Kegelschnitt z. B. die Gerade BC trifft, hat man nur zu beachten, dass diese Punkte die Doppelelemente derjenigen

*) Wir nennen zwei Seiten BC und B′C′ der beiden Dreiecke entsprechend, wenn jede dem Pol der andern gegenüberliegt.

Involution sind, in welcher B dem Schnittpunkt von B C und C′ A′ und C dem Schnittpunkt von B C und A′ B′ entspricht (220). Da die Punkte A′ und B die Pole der Geraden B C und C′ A′ sind, so werden diese Punkte und der Durchschnitt der beiden Geraden die Eckpunkte eines Poldreiecks sein (192). Sollte es also vorkommen, dass man beim Aufsuchen der Schnittpunkte des Kegelschnittes und der Geraden B C und C′ A′, wie wir soeben gethan haben, zwei Involutionen ohne Doppelelemente findet, so muss man daraus schliessen, dass der Kegelschnitt nicht vorhanden ist; denn wenn er wirklich vorhanden wäre, so müssten ihn zwei Seiten des Poldreiecks schneiden (195).

Der Collineationsmittelpunkt O der beiden gegebenen Dreiecke (Fig. 187) ist der Pol der Collineationsaxe D E F; die projectivische Verwandtschaft (219) zwischen den Punkten (Polen) der Axe und den vom Collineationscentrum ausgehenden Strahlen (Polaren) ist durch die drei Paare entsprechender Elemente D und A A′, E und B B′, F und C C′ bestimmt; man wird darum mit Hülfe des Lineals die Polare (oder den Pol) eines beliebigen andern Punktes der Axe (eines beliebigen andern von O ausgehenden Strahles) construiren können (66).

Was wir soeben von dem Punkte O und der Collineationsaxe aussagten, kann auch an irgend einem Eckpunkt des einen Dreiecks und seiner Polaren (das ist die entsprechende Seite des andern Dreiecks) wiederholt werden. Denn betrachtet man z. B. den Eckpunkt A′ und die Seite B C, so ist die projectivische Verwandtschaft zwischen den von A′ ausgehenden Strahlen und den Punkten von B C durch die drei Paare entsprechender Elemente, A′ B′ und C, A′ C′ und B, A′ O und D bestimmt.

Das Vorhergehende vorausgesetzt, kann man auch die Polare eines beliebigen Punktes P oder den Pol einer beliebigen Geraden p construiren. Ist nämlich P gegeben, so können wir schon die Pole der Geraden P O, P A, P B, P C, P A′, ... construiren, welche alle auf einer geraden Linie X, der gesuchten Polaren von P liegen. Gibt man dagegen die Gerade p, so müssen die Polaren derjenigen Punkte, in welchen sie B C, C A, ... trifft, in einem Punkte, dem Pol von p, zusammenlaufen.

Beachten wir, dass alle diese Bestimmungen von Polen und Polaren linear (vom ersten Grade) und von der Construction des Fundamental-Kegelschnittes unabhängig sind, dass letztere aber eine Aufgabe des zweiten Grades ist, weil sie auf die Construction

der Doppelelemente einer Involution herauskommt. Die Construction der Pole und Polaren ist also immer möglich, auch wenn der Fundamental-Kegelschnitt gar nicht existirt. Mit andern Worten: die beiden gegebenen collinearen Dreiecke bestimmen zwischen den Punkten und Geraden der Ebene eine solche reciproke (involutorisch liegende, 234) Verwandtschaft, dass jedem Punkte eine Gerade, jeder Geraden ein Punkt entspricht, dass den Strahlen eines Büschels die Punkte einer Punktreihe entsprechen, die zu dem Büschel projectivisch ist und umgekehrt. Wir wollen übereinkommen, einen beliebigen Punkt und die ihm entsprechende Gerade Pol und Polare und diese Gesammtheit von Polen und Polaren, welche alle Eigenschaften derjenigen besitzt, die durch einen Fundamental-Kegelschnitt (188) bestimmt ist, ein Polarsystem zu heissen.

Zwei collineare Dreiecke bestimmen also ein Polarsystem. Existirt ein Fundamental-Kegelschnitt, so ist er der Ort der Pole, die auf ihren bezüglichen Polaren liegen und auch die Umhüllungscurve der Geraden, die durch ihre bezüglichen Pole gehen. Existirt kein Fundamental-Kegelschnitt, so gibt es auch keinen Punkt, der auf seiner eigenen Polaren liegt *).

§ 23. Folgerungen und Constructionen.

239. Setzen wir voraus, dass in dem Lehrsatze von Nr. 205 die Eckpunkte B und C des eingeschriebenen Dreiecks ABC die unendlich fernen Punkte der Hyperbel sind; dann wird S (Fig. 171) der Mittelpunkt der Curve sein und der Lehrsatz wird folgender:

Zieht man aus einem Punkte der Hyperbel die Parallelen zu den Asymptoten, so treffen sie einen beliebigen Durchmesser in zwei reciproken Punkten F und G; oder auch:

Zieht man durch zwei reciproke Punkte, die mit dem Centrum der Hyperbel in einer Geraden liegen, die Parallelen zu den Asymptoten, so müssen sie sich auf der Curve schneiden.

Hieraus ergibt sich ein Verfahren, die Hyperbel punktweise zu construiren, wenn die Asymptoten und ein Punkt M gegeben sind. Man nimmt auf der Geraden SM, welche den Schnittpunkt

*) Staudt, loc. cit., Nr. 241.

S der Asymptoten mit dem gegebenen Punkte M verbindet, zwei conjugirte Punkte der durch den Centralpunkt S und den Doppelpunkt M bestimmten Involution; diese Punkte sind in Bezug auf den Kegelschnitt reciprok (220); legt man also durch sie Parallele zu den Asymptoten, so werden die Eckpunkte des entstandenen Parallelogramms Punkte der zu construirenden Curve sein.

240. Wenden wir in gleicher Weise den Lehrsatz von Nr. 204 auf die Hyperbel an, indem wir voraussetzen, dass die Seiten b und c des umschriebenen Dreiecks abc die Asymptoten seien:

Zieht man irgend zwei parallele Geraden (f, g) durch die Schnittpunkte der Asymptoten mit einer beliebigen Tangente der Hyperbel, so sind diese Geraden reciprok; oder auch:

Zwei parallele reciproke Geraden schneiden die Asymptoten in zwei Punkten, welche derselben Tangente der Hyperbel angehören.

Man leitet hieraus ein Verfahren ab, die Tangenten einer Hyperbel zu construiren, wenn die Asymptoten b und c und eine Tangente m gegeben sind. Zu diesem Zwecke hat man nur parallel zu m zwei conjugirte Geraden derjenigen Involution (99) zu ziehen, in welcher m ein Doppelstrahl und der parallele Durchmesser der Centralstrahl ist. Diese beiden Geraden sind in Bezug auf den Kegelschnitt reciprok; verbindet man also ihre Schnittpunkte mit den Asymptoten mit einander, so wird man zwei Tangenten der Curve haben.

241. Zwei beliebige Punkte einer Parabel mögen B und C sein; A sei der Schnittpunkt der Curve mit demjenigen Durchmesser, der durch die Mitte von B C geht. Zwei reciproke Punkte auf diesem Durchmesser, d. h. zwei Punkte, die gleich weit von A entfernt sind (106), heissen F und G; vermöge des Lehrsatzes von Nr. 205 schneiden sich die Geraden F B und C G, sowie die Geraden B G und C F in Punkten der Curve.

Daraus folgt die punktweise Construction der Parabel, die einem Dreieck A B C umschrieben ist und die eine von A nach der Mitte von B C gezogene Gerade zum Durchmesser hat.

Nehmen wir auf der Sehne B C zwei reciproke Punkte H und H′, d. h. solche Punkte, die durch B und C harmonisch getrennt sind. Da die Punkte H und H′ mit dem Pol des durch

A gehenden Durchmessers in gerader Linie sind, so werden wir mit Anwendung des Lehrsatzes von Nr. 205 einen Punkt der Parabel erhalten, indem wir den Durchschnitt von A H mit dem durch H′ gehenden Durchmesser construiren (einen zweiten Punkt im Durchschnitt von A H′ mit dem Durchmesser durch H). So ergibt sich ein neues Mittel, punktweise die Parabel zu construiren, die den oben gegebenen Bedingungen entspricht.

242. Im Lehrsatz von Nr. 204 sei die Tangente c unendlich ferne; dann folgt:

Sind a und b zwei Tangenten einer Parabel und zieht man durch einen beliebigen Punkt des zu a conjugirten Durchmessers zwei reciproke Geraden, von denen eine durch den Punkt $a\,b$ geht, so ist die andere parallel b und umgekehrt.

So erhalten wir eine Methode, mit Hülfe der Tangenten die Parabel zu construiren, von welcher zwei Tangenten a und t, der Berührungspunkt A von a und die Richtung der Durchmesser gegeben sind. Wir ziehen durch A den Durchmesser *); er wird t in O treffen; die zweite durch O gezogene Tangente t' wird diejenige Gerade sein, welche durch den Durchmesser O A und die Parallele zu a von t harmonisch getrennt ist. Ziehen wir nun durch O zwei reciproke Geraden, d. h. zwei Geraden h und h', welche t und t' harmonisch trennen; die durch den Punkt $h\,a$ gezogene Parallele zu h' und die durch den Punkt $h'\,a$ gezogene Parallele zu h werden Tangenten an die gesuchte Parabel sein.

243. Wird in dem Lehrsatz von Nr. 204 vorausgesetzt, es sei die Gerade a unendlich ferne und die Geraden b und c zwei Tangenten der Parabel, so ergibt sich:

Die durch einen Punkt der Berührungssehne gezogenen Parallelen zu zwei Tangenten der Parabel sind reciprok. Durch Anwendung desselben Lehrsatzes haben wir also:

Zieht man durch einen Punkt der Berührungssehne zweier Tangenten b und c einer Parabel zwei Geraden, h parallel zu b und h' parallel zu c, so wird die Verbindungslinie der Punkte $h\,c$ und $h'\,b$ eine Tangente an die Curve sein *1).

---

*) D. i. die Polare des unendlich fernen Punktes von a.

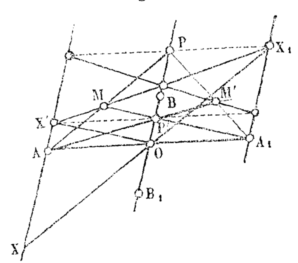
*1) De la Hire, loc. cit., Buch III, S. 21.

Daraus ergibt sich eine Construction der Tangenten an eine Parabel, welche durch zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte bestimmt ist.

244. Setzen wir voraus, im Lehrsatz von Nr. 205 sei das eingeschriebene Dreieck AA_1M, d. h. es liegen zwei Eckpunkte A und A_1 in gerader Linie mit dem Centrum O des Kegelschnittes (Ellipse oder Hyperbel. Fig. 188); der Pol der Seite AA_1 wird der unendlich ferne Schnittpunkt der durch den Durchmesser AA_1 halbirten Sehnen sein. Dieser Lehrsatz (205) wird dann:

Gerade Linien, welche aus zwei reciproken Punkten P und P' nach den Endpunkten A und A_1 des-

Fig. 188.



jenigen Durchmessers gezogen werden, dessen conjugirter Durchmesser parallel PP' ist, schneiden sich auf dem Kegelschnitt.

I. Die analog PP' genommenen Paare reciproker Punkte auf dem AA_1 zugeordneten Durchmesser bilden eine Involution (220), deren Centralpunkt der Mittelpunkt O des Kegelschnittes ist. Hat diese Involution zwei Doppelelemente B, B_1, so gehören diese Punkte der Curve an, die folglich eine Ellipse ist. Hat die Involution keine Doppelpunkte, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel (212); man kann dann zwei Punkte B und B_1 finden, die in der Involution conjugirt und folglich in Bezug auf den Kegelschnitt reciprok sind und in deren Mitte O liegt (96). Im einen wie im andern Fall versteht man unter der Länge des AA_1 zugeordneten Durchmessers das Segment BB_1 (218, 223).

Für die Ellipse hat man (223)

$$O P \,.\, O P' = \text{Const.} = \overline{O B}^2 = \overline{O B_1}^2,$$

für die Hyperbel

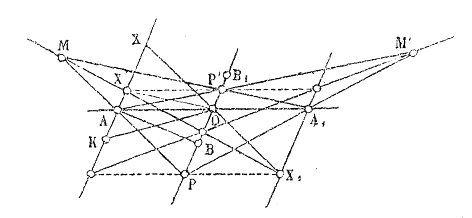
$$O P \,.\, O P' = \text{Const.} = O B \,.\, O B_1 = - \overline{O B}^2 = - \overline{O B_1}^2 \,.$$

II. Der vorhergehende Lehrsatz vermittelt die Auflösung der Aufgabe:

Man soll punktweise den Kegelschnitt construiren, von welchem zwei conjugirte Durchmesser $A A_1$ und $B B_1$ der Grösse und der Lage nach gegeben sind.

Im Fall der Ellipse (Fig. 188) gehören die vier Punkte A, A_1, B, B_1 der Curve an; im Fall der Hyperbel (Fig. 189) soll $A A_1$ derjenige Durchmesser sein, welcher den Kegelschnitt trifft.

Fig. 189.



Wir construiren über dem Durchmesser $B B_1$ mehrere Paare conjugirter Punkte $P P'$ derjenigen Involution, deren Centralpunkt O ist und für welche die Punkte B und B_1 im ersten Fall Doppelpunkte, im zweiten Fall conjugirte Punkte sind. Die Strahlen $A P$ und $A_1 P'$ (sowie die Strahlen $A_1 P$ und $A P'$) werden sich auf der Curve schneiden.

III. Die parallel $A P$ und $A_1 P'$ gezogenen Geraden $O X$ und $O X'$ sind zwei conjugirte Durchmesser (215). Die conjugirten Durchmesser bilden eine Involution (225), folglich bilden die Paare der X und X′ analogen Punkte (in welchen die Durchmesser die Tangente in A schneiden) ebenfalls eine Involution, deren Centralpunkt A ist, weil O A und die A X parallele Gerade O B zwei conjugirte Durchmesser sind. Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so hat die Involution der conjugirten Durchmesser zwei Doppelstrahlen, welche die Asymptoten sind; also sind die Punkte K und K_1, in welchen

AX die Asymptoten trifft, die Doppelpunkte der Involution $XX' \ldots$ *).

IV. Aus den congruenten Dreiecken OPA und AXO folgt: $AX = - OP$ und aus den congruenten Dreiecken $OP'A_1$ und $AX'O$ ebenso $AX' = OP'$ *1); man hat aber

$$OP \,.\, OP' = \pm \overline{OB}^2 \text{ (96), also } AX \,.\, AX' = \mp \overline{OB}^2.$$

Oder auch:

Das Rechteck der Segmente, welche zwei conjugirte Durchmesser auf einer fixen Tangente, vom Berührungspunkt aus gemessen, abschneiden, ist stets gleich dem Quadrat $\left(\mp \overline{OB}^2\right)$ über dem halben Durchmesser, der jener Tangente parallel ist.

V. Im Falle der Hyperbel sind die Punkte K und K_1 die Doppelelemente derjenigen Involution, in welcher A der Centralpunkt, X und X' zwei conjugirte Punkte sind; es ist also

$$AX \,.\, AX' = \overline{AK}^2 = \overline{OB}^2, \text{ folglich } AK = OB.$$

Damit ist bewiesen, dass die Figur $OAKB$ ein Parallelogramm ist, d. h.

Wenn man über zwei conjugirten Durchmessern der Hyperbel ein Parallelogramm construirt, so fallen die Diagonalen mit den Asymptoten zusammen *2).

Um einzusehen, dass AB der zweiten Asymptote parallel ist, hat man nur den harmonischen Büschel zu betrachten (225), der von den beiden Asymptoten und den beiden conjugirten Durchmessern OA und OB mit der Transversalen AB gebildet wird. Der Schnittpunkt der einen Asymptote

---

*) In der Fig. 189 ist nur einer der Punkte K, K_1 bezeichnet.

*1) Um sich die Zeichen zu erklären, hat man nur zu beachten, dass im Falle der Ellipse OP und OP' die gleiche Richtung, AX und AX' aber entgegengesetzte Richtung haben; im Falle der Hyperbel sind OP und OP' entgegengesetzt, AX und AX' gleich gerichtet.

*2) Apollonius, loc. cit., lib. II, S. 1.

und der Transversalen ist der Mittelpunkt von AB; der Schnittpunkt der anderen wird also unendlich ferne liegen (52).

VI. Der Schnittpunkt des Durchmessers OX und der Tangente im Punkte A_1 sei X_1. Da OX' und OX_1 zwei reciproke Geraden sind, die durch einen Punkt der Berührungssehne AA_1 der Tangenten AX und A_1X_1 gehen, so wird die Gerade $X'X_1$ (204) eine Tangente des Kegelschnittes sein.

Der Berührungspunkt dieser Tangente ist M, der Schnittpunkt der Geraden AP und A_1P' (244).

VII. Berücksichtigen wir auch noch, dass $X'X_1$ eine Diagonale des Parallelogramms ist, welches von den Tangenten in A und A_1 und den durch P und P′ gezogenen Parallelen zu AA_1 gebildet wird, so kommen wir auf folgende Art zu demselben Resultate. Die Punkte eines Durchmessers haben Parallele zu dem conjugirten Durchmesser zu Polaren (212); zieht man also durch die reciproken Punkte P und P′ Parallele zu AA_1, so wird die erste die Polare von P′, die zweite die Polare von P sein; also sind diese Parallelen reciprok. Wenden wir jetzt den Lehrsatz von Nr. 204 auf diese reciproken Geraden und die beiden Tangenten in A und A_1 an, so erhalten wir folgenden Satz:

Sind zwei Gegenseiten eines Parallelogramms Tangenten an einen Kegelschnitt, die beiden andern Seiten aber reciproke Geraden, die dem Durchmesser, welcher den beiden Tangenten zugeordnet ist, parallel laufen, so sind die Diagonalen ebenfalls Tangenten an den Kegelschnitt.

VIII. So erhält man folgende Auflösung der Aufgabe:

Vermittelst Tangenten den Kegelschnitt zu construiren, von welchem zwei conjugirte Durchmesser AA_1 und BB_1 der Grösse und Richtung nach gegeben sind.

Setzen wir in dem Fall, wo diese Curve eine Hyperbel ist, voraus, es sei BB_1 derjenige Durchmesser, welcher nicht von der Curve geschnitten wird, bestimmen auf dieser Geraden ein Paar conjugirte Punkte P und P′ in derjenigen Involution, welche den Mittelpunkt O der Curve als Centralpunkt und die Punkte B und

B_1 entweder als Doppelpunkte oder als conjugirte Punkte hat, je nachdem es sich darum handelt, eine Ellipse oder eine Hyperbel zu zeichnen; ziehen wir hierauf durch A und A_1 Parallele zu BB_1 und durch P und P′ Parallele zu AA_1; die Diagonalen des so erhaltenen Parallelogramms werden Tangenten an den gesuchten Kegelschnitt sein.

IX. Die Segmente AX und A_1X_1 sind gleich und entgegengesetzt; wir haben aber gesehen, dass

$$AX \,.\, AX' = \mp \overline{OB}^2, \text{ also } AX' \,.\, A_1X_1 = \pm \overline{OB}^2$$

oder:

Das Rechteck der Segmente, welche eine veränderliche Tangente $(X'X_1)$ auf zwei festen parallelen Tangenten, von ihrem Berührungspunkt aus gemessen, abschneidet, ist also gleich dem Quadrat $\left(\pm \overline{OB}^2\right)$ über dem halben Durchmesser, der den festen Tangenten parallel ist *).

X. Da die Gerade OB den Streifen zwischen AX und A_1X_1 halbirt, so sind die Segmente, welche AM und A_1M beziehungsweise auf A_1X_1 und AX (von A_1 und A aus gemessen) abschneiden, doppelt so gross als OP und OP′; nach dem Satze I dieser Nummer haben wir aber

$$OP \,.\, OP' = \text{const.}$$

Folglich:

Die von den Endpunkten eines gegebenen Durchmessers nach einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes gezogenen Geraden bestimmen auf den Tangenten, welche dem Durchmesser zugeordnet sind, zwei (von den Berührungspunkten aus gemessene) Segmente, deren Product constant ist *1).

XI. Da der Punkt X (216) der Schnittpunkt der Tangente in A und der $X'X_1$ parallelen Tangente ist, so kann der Satz IV auch so ausgedrückt werden:

---

*) Siehe Nr. 123.

*1) Apollonius, loc. cit., lib. III, 8. 53.

Das Rechteck der Segmente (A X, A X′), welche zwei veränderliche parallele Tangenten auf einer festen Tangente bestimmen, ist stets gleich dem Quadrat $\left(\mp \overline{OB}^2\right)$ über dem halben Durchmesser, der jener festen Tangente parallel ist.

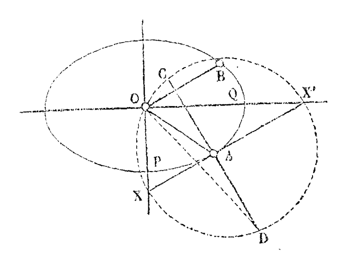
XII. Der Lehrsatz von Nr. 244 dient auch dazu, folgende Aufgabe zu lösen:

Man gibt die beiden Endpunkte A und A_1 des Durchmessers eines Kegelschnittes, einen dritten Punkt M und die Richtung des AA_1 zugeordneten Durchmessers; man soll die Länge des zweiten Durchmessers bestimmen.

Wir ziehen durch O, die Mitte von AA_1, den Durchmesser, dessen Richtung gegeben ist; er wird von A M und A_1 M in P und P′ geschnitten; dann suchen wir die mittlere Proportionale O B zwischen O P und O P′; so wird O B die Hälfte der gesuchten Länge sein.

XIII. Der Lehrsatz IV führt zu einer Construction der Paare conjugirter Durchmesser und insbesondere der Axen einer

Fig. 190.



Ellipse, von welcher zwei halbe conjugirte Durchmesser O A und O B der Grösse und Richtung nach gegeben sind (Fig. 190).

Wir ziehen durch A die Parallele zu O B; diese Gerade wird die Tangente in A sein und zwei beliebige conjugirte Durchmesser werden sie in zwei Punkten X und X′ so schneiden, dass

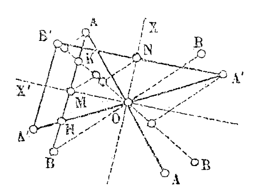
$$AX \,.\, AX' = -\overline{OB}^2.$$

Nehmen wir also auf der Normalen in A zwei Segmente A C und A D gleich O B, so wird jeder durch C und D gezogene Kreis diese Tangente in zwei Punkten X und X′ mit der in obiger

Gleichung ausgesprochenen Eigenschaft also in zwei Punkten schneiden, die, mit dem Centrum O verbunden, die Richtungen zweier conjugirten Durchmesser geben werden. Lässt man den Kreis durch O gehen, so wird der Winkel X O X′ ein rechter; also werden O X und O X′ die Richtungen der Axen sein *).

245. Ziehen wir durch die Endpunkte A und A′ (Fig. 191) von zwei conjugirten Halbmessern O A und O A′ eines Kegelschnittes in beliebiger Richtung zwei parallele Sehnen A B und A′B′. Um die Punkte B und B′ zu construiren, hat man nur die Pole dieser Sehnen zu verbinden; man wird so den Durchmesser O X′ erhalten, welcher ihre Mitten enthält. Die

Fig. 191.



Gruppen von je vier Strahlen O (X, X′, A, B) und O (X′, X, A′, B′) sind harmonisch (52) und darum projectivisch, also bilden die Strahlenpaare O (X X′ . A A′ . B B′) eine Involution (94); da nun aber die beiden Paare O (X X′ . A A′) die Involution der conjugirten Durchmesser bestimmen (98, 225), so sind auch O B und O B′ zwei conjugirte Durchmesser. Oder:

Zieht man durch die Endpunkte A und A′ zweier conjugirten Halbmesser zwei parallele Sehnen AB und A′B′, so sind die Punkte B und B′ die Endpunkte von zwei andern conjugirten Halbmessern.

Zwei Durchmesser A A und B B bestimmen vier Sehnen A B, welche die Seiten eines Parallelogramms sind (194, 215). Die bezüglichen conjugirten Durchmesser A′A′ und B′B′ liefern ebenso ein anderes Parallelogramm, dessen Seiten den-

*) Chasles, Aperçu S. 45 und 362; Sections coniques, Nr. 205.

jenigen des ersten parallel sind, d. h. jede Sehne A B ist zwei Sehnen A′B′ parallel, zwei anderen A′B′ nicht parallel.

I. Die Schnittpunkte von AB und den Geraden O A′ und O B′ mögen H und K sein; der Durchmesser O X′, welcher A′ B′ halbirt, geht auch durch die Mitte von H K; die Geraden A B und H K haben also den gleichen Mittelpunkt und AH = KB, ebenso AK = HB. Die Dreiecke O A K und O B H sind also gleich *), ebenso die Dreiecke A K B′ und B H A′ und folglich auch die Dreiecke O A B′ und O A′ B. Oder:

Das über zwei Halbmessern (OA, OB′) construirte Parallelogramm ist gleich dem Parallelogramm, das über den beiden beziehungsweise conjugirten Halbmessern construirt wird.

Auf dieselbe Art beweist man auch die Gleichheit der Dreiecke O A B und O A′ B′.

Die Dreiecke A H A′ und B K B′ sind aus demselben Grunde gleich; die Dreiecke O A H und O B K und folglich auch die Dreiecke O A A′ und O B B′ sind gleich; mit andern Worten:

Das über zwei conjugirten Halbmessern construirte Parallelogramm hat einen constanten Inhalt.

II. Die Mittelpunkte der nicht parallelen Sehnen A B und A′ B′ sollen M und N sein. Da A B und A′ B′ die Richtungen von zwei conjugirten Durchmessern haben (215) und O N der der Sehne A′ B′ zugeordnete Durchmesser ist, so wird O N parallel A B sein; ebenso sind O M und A′ B′ parallel; die Winkel O M A und O N A′ sind also gleich oder Supplemente. Da ausserdem die Dreiecke O M A und O N A′ als Hälften der gleich grossen O A B und O A′ B′ inhaltsgleich sind, so haben wir die Gleichung

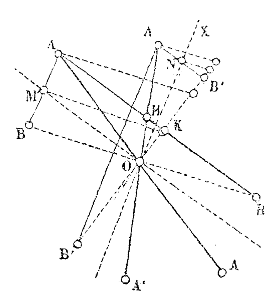
$$OM . AM = \pm ON . NA' \text{ *1)}.$$

*) Baltzer, Planim., S. 61.

*1) Das durch die gegenseitige Lage der Segmente O M, N A′ und

Projiciren wir jetzt (Fig. 192) die Punkte A, M, B, A′, N, B′ aus dem unendlich fernen Punkte von O B auf die Gerade B′B′. Das Verhältniss der parallelen Segmente A M und O N, O M und N A′ ist gleich demjenigen ihrer Projectionen, man wird also aus der obigen Gleichung schliessen, dass das Rechteck der Projectionen von O M und A M gleich dem Rechteck der Projectionen von O N und N A′ ist. Da die

Fig. 192.



projicirenden Strahlen parallel O B sind, so sind die Projectionen von O M und M A beide gleich der Hälfte der Projection von B A oder derjenigen von O A. Da N die Mitte von A′B′ ist, so wird die Projection von O N die halbe Summe der Projectionen von O A′ und O B′ und die Projection von N A′ die Hälfte der Projection von A′B′ oder die halbe Differenz der Projectionen von O A′ und O B′ sein. Man hat also

$$(\text{Proj. } O A)^2 = \pm \text{ Proj. } (O A' + O B') \times \text{ Proj. } (O B' - O A')$$

oder

$$(\text{Proj. } O A')^2 \pm (\text{Proj. } O A)^2 = (\text{Proj. } O B')^2.$$

Würde man dieselben Punkte mit Hülfe von Parallelen zu O B′ auf O B projiciren (Fig. 193), so erhielte man

$$(\text{Proj. } O A)^2 \pm (\text{Proj. } O A')^2 = (\text{Proj. } O B)^2.$$

Damit ist bewiesen:

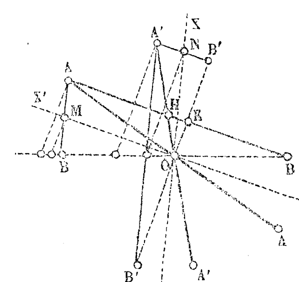
W e r d e n z w e i b e l i e b i g e c o n j u g i r t e H a l b m e s s e r m i t H ü l f e v o n P a r a l l e l e n z u e i n e m D u r c h m e s s e r a u f

---

der Segmente O N, A M begründete doppelte Vorzeichen entspricht dem Fall der Ellipse (Fig. 191) und demjenigen der Hyperbel (Fig. 192).

den conjugirten Durchmesser projicirt, so ist (bei der Ellipse) die Summe oder (bei der Hyperbel) die Differenz der Quadrate der Projectionen stets gleich dem Quadrate dieses letzteren Halbmessers.

Fig. 193.



Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze ist die Summe der Quadrate der rechtwinkligen Projectionen einer Strecke auf zwei lothrechten Geraden gleich dem Quadrat der Strecke selbst*); werden also zwei conjugirte Durchmesser rechtwinklig auf eine Axe des Kegelschnittes projicirt und die Quadrate der Projectionen eines jeden Durchmessers auf beide Axen addirt, so erhält man folgenden Lehrsatz:

Die Summe (bei der Ellipse) oder die Differenz (bei der Hyperbel) der Quadrate von zwei beliebigen conjugirten Halbmessern ist constant; sie ist stets gleich der Summe oder der Differenz der Quadrate der halben Axen *1).

246. Setzen wir voraus, dass die Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks (Fig. 194) einen Kegelschnitt in den Punktenpaaren DD', EE', FF' durchschneiden. Sieht man dieses Dreieck so an, als sei es von den Transversalen DE und D'E' in den Punkten DD', EE', GG' geschnitten, so ergibt der Lehrsatz des Menelaus (104) folgende Gleichungen

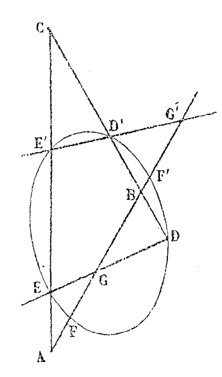
$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AG}{BG} = 1, \quad \frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{CE'}{AE'} \cdot \frac{AG'}{BG'} = 1. \qquad (\alpha)$$

*) Baltzer, Planim., S. 63.

*1) Apollonius, loc. cit., lib. VII, S. 12, 13, 22, 25.

Das Viereck D E E′ D′ ist dem Kegelschnitt eingeschrieben; die Transversale A B schneidet dessen Gegenseiten und den Kegelschnitt in drei Punktenpaaren, die nach dem Lehr-

Fig. 194.



satz von Desargues (143) eine Involution bilden; wir haben also (100) die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(A\,B\,F\,G) = (B\,A\,F'\,G'),$$

woraus

$$(A\,B\,F\,G) = (A\,B\,G'\,F')\ (38) \text{ oder } (A\,B\,F\,G) : (A\,B\,G'\,F') = 1$$

in anderer Form

$$\frac{A\,F\,.\,A\,F'}{B\,F\,.\,B\,F'} : \frac{A\,G\,.\,A\,G'}{B\,G\,.\,B\,G'} = 1. \qquad (\beta)$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen (α) und (β) mit einander, so findet man

$$(1) \qquad \frac{B\,D\,.\,B\,D'}{C\,D\,.\,C\,D'} \cdot \frac{C\,E\,.\,C\,E'}{A\,E\,.\,A\,E'} \cdot \frac{A\,F\,.\,A\,F'}{B\,F\,.\,B\,F'} = 1.$$

Diese Relation drückt einen berühmten Lehrsatz von Carnot aus *).

I. Hat man, umgekehrt, auf den Seiten B C, C A, A B eines Dreiecks drei Punktenpaare D D′, E E′, F F′ und befriedigen die durch diese Punkte und die Eckpunkte bestimmten Seitenabschnitte die Gleichung (1), so gehören diese sechs

*) Géométrie de position, S. 437.

Punkte demselben Kegelschnitte an. Denn beschreiben wir den durch die fünf Punkte D, D′, E, E′, F bestimmten Kegelschnitt, so möge F″ dessen zweiter Schnittpunkt mit AB sein. Wir haben dann, vermöge des Carnot'schen Lehrsatzes, eine Gleichung, welche sich von der obigen Relation (1) nur darin unterscheidet, dass an der Stelle von F′ der Punkt F″ steht. Diese Gleichung gibt, verbunden mit (1)

$$AF' : BF' = AF'' : BF''$$

und hieraus

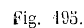
$$(A\,B\,F'F'') = 1 \text{ oder } (F''F'\,B\,A) = 1,$$

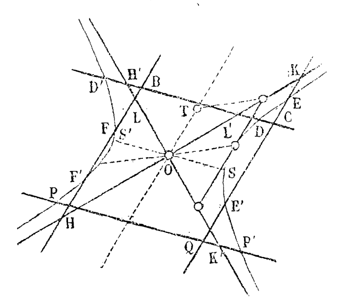
es müssen also (57) F′ und F″ coincidiren.

II. Rückt der Punkt A ins Unendliche (Fig. 195), so nähern sich die Verhältnisse $AF : AE$, $AF' : AE'$ der Einheit, folglich wird die Gleichung (1) in diesem Falle

$$\frac{BD \, . \, BD'}{CD \, . \, CD'} \cdot \frac{CE \, . \, CE'}{BF \, . \, BF'} = 1. \tag{2}$$

Ziehen wir parallel BC eine Gerade, welche CEE′ in Q und den Kegelschnitt in P und P′ trifft; dann wird die


Fig. 195.



letzte Gleichung, auf die Transversalen DD′ und PP′ angewandt, geben

$$\frac{QE \, . \, QE'}{CE \, . \, CE'} \cdot \frac{CD \, . \, CD'}{QP \, . \, QP'} = 1,$$

und, wenn man diese letzten zwei Gleichungen mit einander multiplicirt, erhält man:

$$\frac{BD \, . \, BD'}{BF \, . \, BF'} = \frac{QP \, . \, QP'}{QE \, . \, QE'},$$

mit andern Worten:

Zieht man durch einen beliebigen Punkt (Q) in gegebenen Richtungen zwei Transversalen durch einen Kegelschnitt, so stehen die Producte der Abschnitte (QP . QP' : QE . QE'), welche durch die Curve von dem Schnittpunkt der Transversalen aus auf diesen bestimmt werden, in einem constanten Verhältniss *):

III. Wird vorausgesetzt, es sei in der Gleichung (2) der Kegelschnitt eine Hyperbel und an der Stelle von BC eine Asymptote HK der Curve genommen, so wird das Verhältniss HD . HD' : KD . KD' gleich der Einheit; folglich

$$HF . HF' = KE . KE',$$

oder auch:

Zieht man durch einen beliebigen Punkt H (oder H') einer Asymptote, parallel zu einer gegebenen Geraden, eine Transversale, welche die Hyperbel in zwei Punkten F und F' (oder D und D') schneidet, so ist das Rechteck der Abschnitte (oder H'D . H'D') constant.

Trifft der Durchmesser, welcher der gegebenen Richtung H'D parallel geht, die Curve in zwei Punkten S und S', so wird, wenn O der Mittelpunkt ist,

$$H'D . H'D' = OS . OS' = -\overline{OS}^2.$$

Schneidet der Durchmesser OT, welcher der gegebenen Richtung HF parallel geht, die Curve nicht, so wird man eine Tangente ziehen können, die ihm parallel ist, das Quadrat desjenigen Abschnittes dieser Parallelen, welcher zwischen der Asymptote und dem Berührungspunkte liegt, wird vermöge des vorliegenden Lehrsatzes gleich dem Rechtecke HF . HF' sein; dieser Abschnitt aber ist (244) gleich der Hälfte OT des parallelen Durchmessers, also

$$HF . HF' = \overline{OT}^2, \text{ oder:}$$

---

*) Apollonius, loc. cit., lib. III, S. 16—23. — Desargues, loc. cit., S. 202. — De la Hire, loc. cit., Buch V, S. 10, 12.



Schneidet eine Gerade die Hyperbel in F und F′ (in D und D′) und eine Asymptote in H (in H′), so ist das Product HF . HF′ (das Product H′D . H′D′) gleich dem positiven oder negativen Quadrat des halben Durchmessers O T (O S), der jener Sekante parallel geht; man hat das Vorzeichen + oder — zu nehmen, je nachdem die Curve solche Tangenten hat, die der Sekante parallel sind oder nicht.

IV. Schneidet die Sekante die andere Asymptote in L (in L′), so haben wir (151)

$$HF' = FL \text{ oder } H'D' = DL',$$

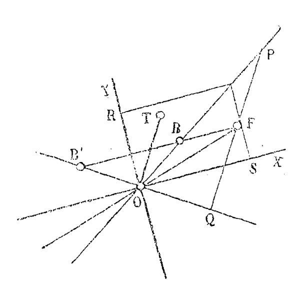
folglich auch

$$FH \,.\, FL = -\overline{OT}^2 \text{ oder } DH' \,.\, DL' = \overline{OS}^2\text{; also:}$$

Schneidet eine durch einen Punkt F (D) einer Hyperbel gezogene Gerade ihre Asymptoten in H und L (in H′ und L′), so ist das Product FH . FL (DH′ . DL′) gleich (∓) dem negativ oder positiv genommenen Quadrat des halben Durchmessers, der jener Sekante parallel ist (— oder + je nachdem die Curve solche Tangenten hat, die der Sekante parallel sind oder nicht).

V. Man leitet daraus ein Verfahren ab, die Axen einer Hyperbel zu construiren, von welcher zwei conjugirte

Fig. 196.



Halbmesser O F und O T der Grösse und Richtung nach gegeben sind (Fig. 196). Wir construiren zuerst die Asymptoten. Ist O F derjenige Durchmesser, welcher die Curve schneidet, so ziehen wir zu diesem Zwecke durch F die Parallele zu O T; das

wird die Tangente in F sein; dann nehmen wir auf dieser Geraden FP und FQ gleich OT, so werden OP und OQ die Asymptoten sein (244). Um jetzt die Richtungen der Axen OX und OY zu erhalten, hat man nur die Halbirungslinien der Asymptotenwinkel oder die beiden rechtwinkligen, conjugirten Strahlen derjenigen Involution zu suchen, deren Doppelstrahlen OP und OQ sind (225, 226).

Ziehen wir durch F die Parallele zu OX, sie schneide die Asymptoten in B und B'; nehmen wir auf OX den Abschnitt OS gleich der mittleren Proportionalen zwischen FB und FB', so wird OS die Länge der Halb-Axe in der Richtung von OX sein und diese wird die Curve schneiden oder nicht schneiden, je nachdem die Abschnitte FB und FB' gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben. Construiren wir endlich das Parallelogramm, dessen eine Seite OS ist, von welchem eine zweite Seite die Richtung von OY hat und dessen Diagonale mit einer Asymptote zusammenfällt; die Seite OR wird die Länge der Halb-Axe in der Richtung von OY sein (244).

VI. Nehmen wir in der Ebene eines Dreiecks ABC zwei beliebige Punkte O und O'; die Geraden OA, OB, OC treffen beziehungsweise die Gegenseiten BC, CA, AB in den Punkten D, E und F; der Lehrsatz von Ceva (104) gibt uns

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = -1.$$

Treffen auch die Geraden O'A, O'B, O'C die Gegenseiten des Dreiecks in den Punkten D', E', F', so werden wir ebenso haben

$$\frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{CE'}{AE'} \cdot \frac{AF'}{BF'} = -1.$$

Multipliciren wir diese beiden Gleichungen mit einander, so bekommen wir die Gleichung (1); also:

Projicirt man aus zwei beliebigen Punkten die Eckpunkte eines Dreiecks auf die bezüglichen Gegenseiten, so erhält man sechs Punkte, die auf demselben Kegelschnitte liegen.

So sind zum Beispiel die Mitten der drei Seiten eines Dreiecks und die Fusspunkte der drei Höhen desselben sechs Punkte eines Kegelschnittes *).

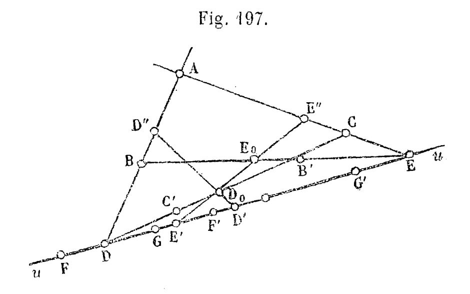
---

*) Dieser Kegelschnitt ist ein Kreis. Siehe Steiner, Bd. XIX der Annales de Mathématiques (Montpellier, 1828), S. 42. Ges. Werke, S. 195.

247. Aufgabe. Einen Kegelschnitt zu construiren, der durch drei gegebene Punkte A, B, C geht und in Bezug auf welchen die conjugirten Punkte einer auf einer Geraden u gegebenen Involution reciproke Punkte sind (Fig. 197).

Die Geraden AB und AC treffen u in D und E. Die diesen zugeordneten Punkte in der gegebenen Involution seien D′ und E′. Der von D durch A und B harmonisch getrennte Punkt

Fig. 197.



sei D″; ebenso sei E″ der von E durch A und C harmonisch getrennte Punkt. Dann ist der Punkt D sowohl zu D′ als zu D″ reciprok, die Gerade D′D″ wird also die Polare zu D sein; ebenso wird E′E″ die Polare von E sein.

Ziehen wir die Geraden BE und CD bis zu ihren bezüglichen Durchschnitten mit E′E″ und D′D″ in E_0 und D_0; der erste dieser Punkte wird reciprok zu E, der zweite reciprok zu D sein. Construirt man dann die Punkte B′ und C′ so, dass die Gruppen $B B' E E_0$ und $C C' D D_0$ harmonisch sind, so werden sie der verlangten Curve angehören.

In der Figur sind die Paare FF′ und GG′ diejenigen Punkte, welche auf u die gegebene Involution reciproker Punkte bestimmen.

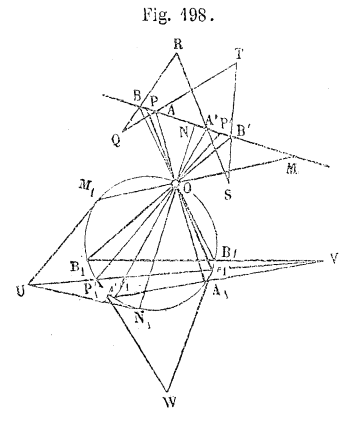
248. Aufgabe. Den Kegelschnitt zu construiren, welcher durch vier gegebene Punkte Q, R, S und T geht und eine gegebene Strecke MN harmonisch theilt (Fig. 198).

Die Gerade MN schneidet die Paare der Gegenseiten des Vierecks QRST in A und A′, B und B′. Trifft der gesuchte Kegelschnitt MN in zwei Punkten, so werden diese ein Paar der durch AA′ und BB′ bestimmten Involution bilden (143). Wenn folglich die Involution, deren Doppelpunkte M und N sind und die durch die Paare AA′ und BB′ bestimmte Involution ein ge-

meinsames Paar $P P'$ haben, so wird der gesuchte Kegelschnitt durch jeden der Punkte P und P' gehen (96, 164).

Um diese Punkte zu construiren, beschreiben wir einen beliebigen Kreis (164) und projiciren aus einem seiner Punkte O die Punkte A, A', B, B', M, N in A_1, A_1', B_1, B_1', M_1, N_1 auf der Peripherie. Ist V der Schnittpunkt der Geraden $A_1 A_1'$ und $B_1 B_1'$ und U der Schnittpunkt der Tangenten in M_1 und N_1, so

Fig. 198.



bestimmen die durch U und V gehenden Geraden auf der Peripherie und folglich (mit Hülfe der aus O gemachten Projectionen) auf der Geraden $M N$ die Paare der conjugirten Punkte in der einen und der anderen Involution. Trifft die Gerade $U V$ den Kreis in zwei Punkten $P_1 P_1'$, so hat man sie nur aus O zu projiciren, um die gesuchten Punkte P und P' zu erhalten.

Der Pol von $U V$ in Bezug auf den Kreis sei W. Jede durch W gehende und den Kreis schneidende Gerade bestimmt auf diesem und folglich auch auf $M N$ zwei durch P und P' harmonisch getrennte und darum in Bezug auf den gesuchten Kegelschnitt reciproke Punkte. Schneidet also $U V$ den Kreis nicht, d. h. kann man die Punkte P und P' nicht construiren, so werden wir durch W zwei Geraden ziehen, welche den Kreis schneiden; wir projiciren dann aus dem Punkte O die Schnittpunkte auf die Gerade $M N$; so werden wir zwei Punktenpaare bekommen, welche die Involution der in Bezug auf den Kegelschnitt reciproken Punkte bestimmen. Die Aufgabe wird so auf diejenige zurückgeführt, welche wir in der vorhergehenden Nummer behandelt haben.

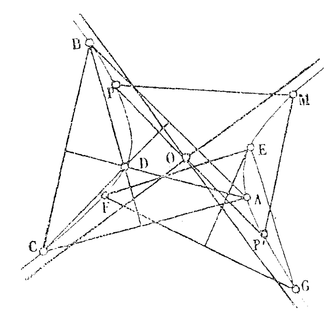
249. Aufgabe. Den Kegelschnitt zu construiren, der durch vier gegebene Punkte Q, R, S und T und durch zwei conjugirte (nicht gegebene) Punkte einer auf einer Geraden u gegebenen Involution geht.

Diese Aufgabe ist der vorigen analog; denn es handelt sich darum, dasjenige Paar conjugirter Punkte zu construiren, welches der gegebenen Involution und auch derjenigen Involution gemeinsam ist, welche auf u durch die Paare der Gegenseiten des Vierecks QRST (143) bestimmt wird. Das gesuchte Paar ist wirklich vorhanden, wenn die gegebene Involution keine Doppelpunkte hat und die Punkte, welche es bilden, gehören dem gesuchten Kegelschnitte an. Hat die gegebene Involution zwei Doppelpunkte M und N, so fällt unsere Aufgabe ganz mit derjenigen von Nr. 248 zusammen.

Diese sowie die zwei vorhergehenden Aufgaben lassen offenbar nur eine Lösung zu.

250. Betrachten wir eine Hyperbel mit rechtwinkligen Asymptoten (Fig. 199). Da die Asymptoten allgemein zwei beliebige conjugirte Durchmesser harmonisch trennen (225), so werden hier die Winkel der conjugirten Durchmesser durch die Asymptoten halbirt (53); zwei conjugirte Halbmesser sind

Fig. 199.



aber die Seiten eines Parallelogramms, dessen Diagonalen die Richtung der Asymptoten haben (244); dieses Parallelogramm wird also hier ein Rhombus sein; mit andern Worten: conjugirte Durchmesser sind gleich lang. Wegen

dieser Eigenschaft nennt man solche Hyperbeln gleichseitig *).

I. Da die von einem beliebigen Punkte M der Curve nach den Endpunkten P und P′ eines Durchmessers gezogenen Geraden die Richtungen von zwei conjugirten Durchmessern haben (215), so sind die Winkel, welche die Geraden PM und P′M mit jeder Asymptote bilden, gleich und entgegengesetzt. Bleiben die Punkte P und P′ fest, während der Punkt M die Curve durchläuft, so beschreiben die Strahlen PM und P′M zwei entgegengesetzt-gleiche Büschel (80).

II. Umgekehrt schneiden sich die entsprechenden Strahlen von zwei entgegengesetzt-gleichen Büscheln in Punkten, deren Ort eine gleichseitige Hyperbel ist. Dieser Ort ist ein Kegelschnitt, da die beiden Büschel projectivisch sind (78). Diese beiden Büschel haben je zwei rechtwinklige Strahlen, welche beziehungsweise den entsprechenden Strahlen des andern Büschels parallel sind (80); der Kegelschnitt hat also zwei unendlich ferne Punkte, welche auf zwei senkrechten Richtungen liegen, folglich ist er eine gleichseitige Hyperbel. Die Mittelpunkte P und P′ der beiden Büschel sind die Endpunkte eines Durchmessers; denn die Tangente p in P ist derjenige Strahl, welcher der Geraden P′P, als Strahl p' des zweiten Büschels angesehen, entspricht und die Tangente q' in P′ entspricht PP′, als ein Strahl q des ersten Büschels angesehen (114), die Winkel pq und $p'q'$ müssen aber gleich und entgegengesetzt sein; also müssen die Tangenten p und q' parallel sein, da p' und q zusammenfallen.

III. Die Eckpunkte eines Dreiecks ABC und sein Höhendurchschnitt D sind die Eckpunkte eines vollständigen Vierecks ABCD, in welchem jede Seite auf der gegenüberliegenden senkrecht steht und dessen sechs Seiten auf der unendlich fernen Geraden drei Punktenpaare bestimmen, die aus einem beliebigen Centrum S durch drei Paare rechtwinkliger Geraden projicirt werden. Diese drei Paare gehören

*) Apollonius, loc. cit., lib. VII, S. 21. — De la Hire, loc. cit., Buch V, S. 13.

also einer Involution an, in welcher jeder Strahl auf seinem conjugirten senkrecht steht (101 links, 95, 163).

Dieser involutorische Büschel projicirt aber, nach dem Lehrsatze von Desargues (143), aus S die Involution der Punkte, welche auf der unendlich fernen Geraden durch die Paare der Gegenseiten des Vierecks und durch die umschriebenen Kegelschnitte (Hyperbeln) *) bezeichnet werden. Also geben die Paare der conjugirten Strahlen der ersten Involution die Richtungen der Asymptoten dieser Kegelschnitte; oder:

Alle Kegelschnitte, welche durch die Eckpunkte und den Höhendurchschnitt eines Dreiecks gehen, sind gleichseitige Hyperbeln.

IV. Lässt man, umgekehrt, eine gleichseitige Hyperbel durch die Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks gehen, so muss sie auch durch seinen Höhendurchschnitt D gehen. Stellen wir uns nämlich eine andere Hyperbel vor, die (125) durch die vier Punkte A, B, C, D und durch einen unendlich fernen Punkt der gegebenen Hyperbel bestimmt ist, so muss sie vermöge des vorhergehenden Lehrsatzes gleichseitig sein, folglich wird sie durch den zweiten unendlich fernen Punkt der gegebenen Curve gehen. So haben denn die beiden Hyperbeln fünf gemeinsame Punkte (A, B, C und zwei unendlich ferne Punkte), folglich fallen sie zusammen; was zu beweisen war. Oder:

In jedem einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreieck liegt der Höhendurchschnitt auf der Curve.

V. Kommt der Punkt D dem Punkte A unendlich nahe, d. h. wird der Winkel BAC ein rechter, so haben wir:

In jedem rechtwinkligen Dreieck EFG (Fig. 199), das einer gleichseitigen Hyperbel eingeschrieben wird, steht die Tangente im Scheitel E des rechten Winkels auf der Hypotenuse senkrecht.

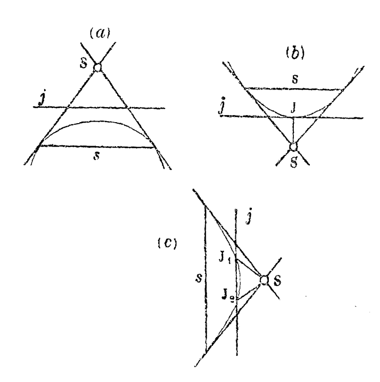
---

*) Es gibt keine Ellipse und keine Parabel, die dem fraglichen Viereck umschrieben ist (Nr. 170).

VI. Durch vier beliebig gegebene Punkte Q, R, S und T geht eine einzige gleichseitige Hyperbel (249). Der Höhendurchschnitt eines jeden der Dreiecke QRS, RST, STQ und QRT gehört der Curve an *).

251. Nehmen wir an, ein Kegelschnitt, ein Punkt S und seine Polare *s* seien gegeben. Eine durch S gehende Gerade treffe den Kegelschnitt in A und A′. Will man die collineare Figur des gegebenen Kegelschnittes construiren (19), indem man S als Centrum, *s* als Axe der Collineation und A′ als entsprechenden Punkt von A nimmt, so wird jeder andere Punkt B′, der einem Punkte B des Kegelschnitts entspricht, auch auf demselben Kegelschnitte liegen. Denn trifft AB die Axe *s* in P, so ist der Schnittpunkt B′ von SB und A′P ebenfalls ein Punkt der Curve (186). Die collineare Curve des gegebenen Kegelschnittes wird also der Kegelschnitt selbst sein. Zwei entsprechende Punkte (oder Geraden) sind durch S und *s* harmonisch getrennt *1).

Fig. 200.



Der unendlich fernen Geraden wird also die Gerade *j* entsprechen, die parallel *s* und von S und *s* gleich weit entfernt ist;

---

*) Lehrsätze von Brianchon und Poncelet, ausgesprochen in einer Arbeit in Band XI der Annales de Mathématiques (Montpellier, 1821) und wiederholt in Bd. I, S. 504 der Applications d'Analyse et de Géométrie von Poncelet (Paris, 1864).

*1) Man nennt diese Eigenschaft die harmonische Collineation. Siehe Bellavitis, Saggio di Geometria derivata (Bd. VI der Nuovi Saggi der Akademie von Padua, 1838) § 50.

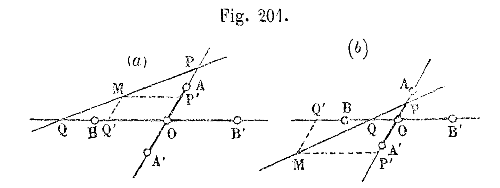
die Schnittpunkte von j und dem Kegelschnitt werden den unendlich fernen Punkten desselben Kegelschnittes entsprechen.

Man zieht daraus ein sehr einfaches Verfahren, um zu erkennen, ob ein gegebener Bogen eines Kegelschnittes, so klein er auch sein mag, einer Ellipse, einer Parabel oder einer Hyperbel angehöre. Wir ziehen eine Sehne s des Bogens und construiren ihren Pol S; dann ziehen wir die Gerade j parallel s und gleich weit von S und s entfernt. Schneidet j den Bogen nicht, so gehört er einer Ellipse an (Fig. 200 a); berührt j den Bogen in einem Punkte J, so gehört er einer Parabel an, von welcher S J ein Durchmesser sein wird (Fig. 200 b); schneidet endlich j den Bogen in zwei Punkten J_1 und J_2 (Fig. 200 c), so ist die Curve eine Hyperbel, deren Asymptoten $S J_1$ und $S J_2$ parallel sind *).

252. Aufgabe. Die Lage (nicht aber die Grösse) zweier conjugirten Durchmesser und eine Tangente mit ihrem Berührungspunkt sind gegeben; man soll die Curve construiren (Fig. 201).

Wir nehmen an, die Tangente treffe in P und Q die gegebenen Durchmesser, deren Schnittpunkt O ist. Projiciren wir mit Hülfe einer Parallelen zu O Q den Berührungspunkt M nach P′ auf O P; ebenso mit Hülfe einer Parallelen zu O P nach Q′

Fig. 201.



auf O Q. Jeder Punkt von O P ist der Pol einer Parallelen zu O Q; zudem sind P und M reciproke Punkte, denn die Polare von M, das ist die Tangente selbst, geht durch P; also ist M P′ die Polare von P; folglich sind auch P und P′ reciproke Punkte.

Wählen wir jetzt die Punkte A und A′ so, dass O A = O A′ gleich der mittleren Proportionalen zwischen O P und O P′ ist, so wird A A′ die Länge des Durchmessers in der Richtung von O P sein (218). Ebenso wird man die Länge B B′ des andern

*) Poncelet, loc. cit., Nr. 225 und 226.

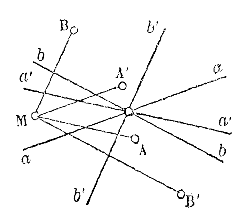
Durchmessers finden, indem man O B = O B′ gleich der mittleren Proportionalen zwischen O Q und O Q′ macht.

Fallen die Punkte P und P′ auf dieselbe Seite des Punktes O, so hat die Involution der reciproken Punkte zwei Doppelpunkte A und A′ (98), d. h. der Durchmesser O P schneidet die Curve. Liegt dagegen O zwischen P und P′, so hat die Involution keine Doppelpunkte und der Durchmesser schneidet die Curve nicht. In diesem Falle sind A und A′ zwei reciproke Punkte in gleichen Abständen von O. Die Figur veranschaulicht zwei Fälle: den der Ellipse (a) und den der Hyperbel (b).

253. Aufgabe. Ein Punkt M und zwei Paare conjugirter Durchmesser a und a', b und b' sind der Lage nach gegeben; man soll den Kegelschnitt construiren.

Erste Auflösung (Fig. 202). Wir ziehen durch M zu jedem Durchmesser eine parallele Sehne, deren Mitte auf den con-

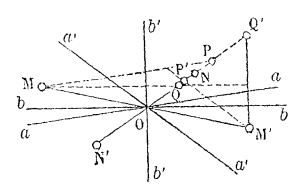
Fig. 202.



jugirten Durchmesser fallen wird. Die zweiten Endpunkte A, A′, B, B′ der vier so erhaltenen Sehnen werden vier Punkte des gesuchten Kegelschnittes sein.

Zweite Auflösung (Fig. 203). Bezeichnen wir den Durchmesser M O M′ mit c und construiren den conjugirten Strahl c' in

Fig. 203.



der durch die Paare $a\,a'$ und $b\,b'$ bestimmten Involution, so wird c' der c zugeordnete Durchmesser sein (225). Durch M und M′

ziehen wir parallel zu a und a' die Geraden M P und M' P', welche c' in P und P' treffen und sich in einem Punkte der Curve schneiden (216). Die Punkte P und P' sind reciprok (244); nimmt man also auf c' zwei andere Punkte Q und Q', die sich in der durch das Paar P P' und den Centralpunkt O bestimmten Involution entsprechen, so werden sich M Q und M' Q' in einem Punkte der Curve schneiden. Machen wir dann auf c', O N = O N' = der mittleren Proportionalen zwischen O P und O P', so werden N und N' die Endpunkte des Durchmessers c' sein (218).

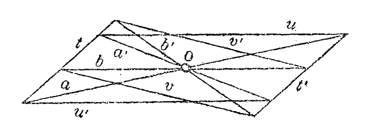
Dritte Auflösung. Durch die Endpunkte M und M' des durch den gegebenen Punkt gehenden Durchmessers ziehen wir die Parallelen zu a und a'; sie werden sich in einem Punkte A der Curve schneiden; durch dieselben Punkte ziehen wir die Parallelen zu b und b'; sie werden sich in einem andern Punkte B derselben Curve schneiden (216). Verlängern wir A O und B O bis zu A' und B', so dass O A' = A O und O B' = B O wird, so werden A' und B' ebenfalls Punkte des gesuchten Kegelschnittes sein (210).

254. Aufgabe. Den Kegelschnitt zu construiren, von welchem man die Lage von zwei Paaren conjugirter Durchmesser $a a'$ und $b b'$ und eine Tangente t kennt.

Erste Auflösung. Wir ziehen die Tangente t' parallel t und gleich weit vom Centrum O, verbinden die Schnittpunkte von t und t' mit a und a'; so erhalten wir zwei andere parallele Tangenten u und u' (216); man wird noch zwei weitere Tangenten v und v' erhalten, indem man die Schnittpunkte von t und t' mit b und b' mit einander verbindet (Fig. 204).

Zweite Auflösung. Die conjugirten Durchmesser a und a', b und b' treffen t in den Punkten A und A', B und B'. Die

Fig. 204.



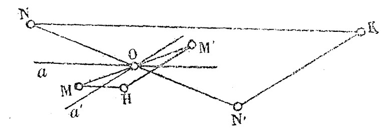
Punktenpaare A A', B B' bestimmen eine Involution, deren Centralpunkt der Berührungspunkt von t ist (244). Die Aufgabe wird so auf eine schon gelöste zurückgeführt (252). Hat die In-

volution Doppelpunkte, so wird man die Asymptoten erhalten, indem man diese Punkte mit O verbindet.

255. Aufgabe. Den Kegelschnitt zu construiren, von welchem zwei conjugirte Durchmesser a und a' (der Lage nach) und zwei Punkte M und N gegeben sind (Fig. 205).

Auflösung. Die zweiten Endpunkte der durch die gegebenen Punkte M und N gehenden Durchmesser mögen M′ und

Fig. 205.

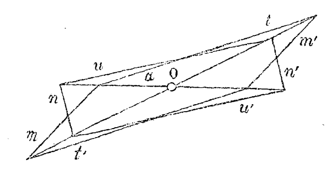


N′ sein. Wir ziehen durch M und M′ die Geraden MH und M′H parallel zu a und a'; ebenso durch N und N′ die Geraden NK und N′K parallel zu a und a'. Die Punkte H und K werden der zu construirenden Curve angehören.

Aufgabe. Den Kegelschnitt zu construiren, von welchem zwei conjugirte Durchmesser b und b' (der Lage nach) und zwei Tangenten m und n gegeben sind (Fig. 206).

Auflösung. Wir ziehen die Tangenten m' parallel m und n' parallel n, in gleichen Entfernungen vom Mittelpunkt O, ver-

Fig. 206.



binden die Schnittpunkte von m und m' mit a und a' durch die Geraden t und t', ebenso die Schnittpunkte von n und n' mit a und a' durch u und u'; so sind diese vier Geraden t, t', u, u' Tangenten an den gesuchten Kegelschnitt (216).

256. Aufgabe. Fünf Punkte eines Kegelschnittes sind gegeben; man soll zwei conjugirte Durchmesser construiren, die einen gegebenen Winkel bilden *).

*) De la Hire, loc. cit., II, 38.

Suchen wir zuerst einen Durchmesser A A′ des Kegelschnittes (213), beschreiben dann über diesem Durchmesser ein Kreissegment, das den gegebenen Winkel fasst und suchen die weiteren Schnittpunkte dieses Kreises mit der Curve (176, II). Ist M einer dieser Punkte, so werden A M und A′M die Richtungen von zwei conjugirten Durchmessern haben. Der Winkel A M A′ ist dem gegebenen Winkel gleich; zieht man also zwei Durchmesser parallel A M und A′M, so ist die Aufgabe gelöst.

Ist das Kreissegment ein Halbkreis, so gibt diese Construction die Axen.

257. Aufgabe. Den Kegelschnitt zu construiren, in Bezug auf welchen ein Dreieck EFG ein Poldreieck und ein gegebener Punkt P der Pol einer gegebenen Geraden p ist*).

Auflösung. Die Gerade p treffe F G in einem Punkt A; die Polare von A wird durch E den Pol von F G und durch P, den Pol von p gehen; diese Gerade wird also E P sein. Ebenso werden F P und G P die Polaren der Punkte B und C sein, in welchen p von G E und E F geschnitten wird. A′ sei der Schnittpunkt von F G und E P; dann sind F G und A A′ zwei Paare reciproker Punkte und wenn die Involution, welche sie bestimmen, zwei Doppelpunkte L und L_1 hat, so werden diese Punkte der verlangten Curve angehören (220). Dieselbe Operation kann auf den beiden andern Seiten des Dreiecks E F G wiederholt werden.

Ist der Punkt P innerhalb des Dreiecks E F G, so liegen die Punkte A′, B′, C′ auf den begrenzten Seiten F G, G E, E F *1) Die Gerade p kann zwei Seiten schneiden oder ganz ausserhalb des Dreiecks sein. Im ersten Falle haben beide Involutionen der beiden geschnittenen Seiten ihre Doppelpunkte (98); so erhalten wir vier Punkte der gesuchten Curve und die Aufgabe wird auf jene zurückgeführt, einen Kegelschnitt zu zeichnen, der durch vier gegebene Punkte geht und in Bezug auf welchen zwei andere gegebene Punkte reciprok sind (248). Im zweiten Fall trennen sich die beiden Paare der reciproken Punkte auf jeder Seite des Dreiecks E F G und die Involutionen haben keine Doppel-

---

*) Staudt, Geometrie der Lage, Nr. 237.

*1) Wir sagen hier, ein Punkt A′ liege auf der Seite F G des Dreiecks, wenn er zwischen F und G liegt, eine Gerade schneide eine Seite F G, wenn ihr Schnittpunkt mit F G zwischen F und G fällt.

punkte (98); in diesem Falle trifft der Kegelschnitt keine Seite des Poldreiecks; er existirt also nicht (195).

Ist der Punkt P ausserhalb des Dreiecks, so liegt nur einer der drei Punkte A′, B′, C′ auf der entsprechenden Seite. Werden die beiden andern Seiten von p geschnitten, so hat keine Involution Doppelpunkte und der Kegelschnitt existirt nicht. Schneidet dagegen p die erste Seite oder ist die Gerade p ganz ausserhalb des Dreiecks, so gibt es wirklich einen Kegelschnitt, den man, wie oben, construiren kann.

In allen Fällen, d. h. sei der Kegelschnitt reell oder nicht, ist das Polarsystem vorhanden (238). Dasselbe ist durch das Poldreieck EFG, den Punkt P und die Gerade p bestimmt. Die Aufgabe, dieses System zu construiren, ist linear, während die Construction der Fundamental-Curve eine Aufgabe des zweiten Grades ist.

258. Aufgabe. Ein Fünfeck ABCDE ist gegeben; man soll den Kegelschnitt zeichnen, in Bezug auf welchen jeder Eckpunkt der Pol der gegenüberliegenden Seite wird *).

Auflösung. Der Schnittpunkt von AB und CD sei F. Construirt man (257) den Kegelschnitt 𝕂, in Bezug auf welchen ADF ein Poldreieck und E der Pol von BC ist, so werden die Punkte B und C, in welchen BC von AF und DF geschnitten wird, die Pole der Geraden ED und EA sein, welche den Punkt E mit den Punkten D und A verbinden. Es wird also jeder Eckpunkt des Fünfecks der Pol der gegenüberliegenden Seite oder der Kegelschnitt 𝕂 wird die verlangte Curve sein.

Construirt man den Kegelschnitt ℭ, welcher durch die fünf Eckpunkte geht und den Kegelschnitt ℭ′, welcher die fünf Seiten des Fünfecks berührt (116), so werden diese Kegelschnitte in Bezug auf 𝕂 reciprok-polar sein (232).

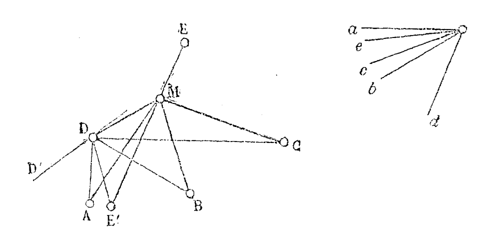
259. Aufgabe. Fünf Punkte A, B, C, D, E (von denen keine drei in derselben Geraden liegen) sind gegeben; man soll einen Punkt M der Art bestimmen, dass der Büschel M (A.B.C.D.E) zu einem gegebenen Büschel $abcde$ projectivisch wird (Fig. 207).

Ziehen wir durch D zwei Geraden DD′ und DE′ in der Weise, dass der Büschel D (A.B.C.D′.E′) zu $abcde$ pro-

*) Staudt, loc. cit., Nr. 238, 258.

jectivisch wird (66 rechts), construiren den Punkt E′, in welchem D E′ den durch die vier Punkte A, B, C, D und die Tangente D D′ bestimmten Kegelschnitt trifft (128), bestimmen hierauf den Punkt M, in welchem derselbe Kegelschnitt E E′ schneidet. Der gesuchte Punkt wird M sein. Da nämlich M, A, B, C, D, E′ Punkte desselben Kegelschnittes sind, so ist die Gruppe

Fig. 207.



M (A.B.C.D.E′) projectivisch zu der Gruppe D (A.B.C.D′.E′), welche nach Construction zu dem gegebenen Büschel *a b c d e* projectivisch ist; es geht aber M E′ durch E, also ist die Aufgabe gelöst.

Die reciproke Aufgabe soll übungsweise gelöst werden.

Diejenige Gerade *m* zu suchen, welche fünf gegebene Geraden *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, von denen nicht drei in demselben Punkt zusammenlaufen, in fünf Punkten trifft, die eine Gruppe bilden, welche zu einer Reihe von fünf gegebenen Punkten A, B, C, D, E projectivisch ist *).

260. Aufgabe. Einen Kreisbogen AB in drei gleiche Theile zu theilen *1).

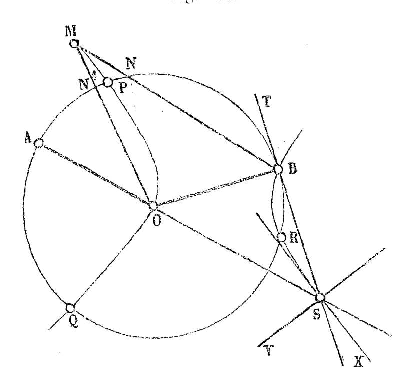
Auflösung. Nehmen wir auf der gegebenen Kreislinie (Fig. 208) von A aus einen beliebigen Bogen A N, dann von B aus in entgegengesetzter Richtung den zweimal so grossen B N′. Ziehen wir die Tangente B T, so sind die Winkel A O N und T B N′ gleich und entgegengesetzt. Verändern sich N und N′ gleichzeitig, so beschreiben die Strahlen O N und B N′ zwei entgegengesetzt gleiche Büschel; der Ort ihres Schnittpunktes M wird also eine gleichseitige Hyperbel sein (250), deren Asymptoten die Richtungen der Halbirungslinien S X und S Y der von

*) Staudt, loc. cit., Nr. 263.

*1) Staudt, Beiträge Nr. 432. — Chasles, Sections coniques Nr. 37.

den Geraden A O und B T gebildeten Winkel haben; denn diese Geraden sind entsprechende Strahlen (Lagen der beweglichen Strahlen O N und B N′, für welche die Bogen A N und B N′ gleich Null sind). Der Mittelpunkt der Hyperbel ist die Mitte der Geraden O B, welche die Centren der Büschel verbindet.

Fig. 208.



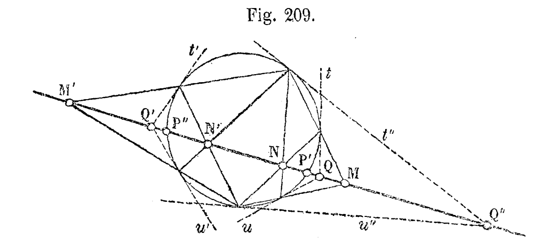
Nachdem man die Hyperbel mit Hülfe des Pascal'schen Satzes construirt hat, erhält man einen Punkt P, in welchem sie den gegebenen Bogen A B schneidet; zwei entsprechende Punkte N und N′ fallen in diesem Punkte zusammen, folglich ist P derjenige Punkt, welcher von dem Bogen A B einen Drittel A P abschneidet.

Die Hyperbel trifft die Kreislinie noch in zwei andern Punkten R und Q. Der Punkt R ist der Theilpunkt desjenigen Bogens, welcher A B zum Halbkreis ergänzt. Der Punkt Q ist der Theilpunkt desjenigen Bogens, welcher A B zur ganzen Kreislinie ergänzt.

261. Wir haben gesehen (149), dass wenn P′, P″, Q′ und Q″ (Fig. 209) vier gegebene Punkte einer geraden Linie sind und wir durch P′ und P″ irgend einen Kegelschnitt legen, die Berührungssehne einer von Q′ und einer von Q″ ausgehenden Tangente an den Kegelschnitt durch einen der Doppelpunkte M′ und N′ derjenigen Involution geht, welche durch die Paare P′P″ und Q′Q″ bestimmt ist. Die beiden von Q′ ausgehenden Tangenten combinirt mit den beiden von Q″ ausgehenden geben vier Berührungssehnen, von denen je zwei durch M′ und N′ gehen.

Hieraus leitet man ein Verfahren ab, die Doppelpunkte der Involution P′P″, Q′Q″ zu construiren oder (98) zwei Punkte M′ und N′ zu finden, welche zwei gegebene Strecken P′P″ und Q′Q″ harmonisch theilen. Beschreiben wir durch P′ und P″ einen

Fig. 209.



Kreis und ziehen daran aus Q′ die Tangenten t' und u', aus Q″ die Tangenten t'' und u''. Die Berührungssehne der Tangenten t' und t'' und diejenige der Tangenten u' und u'' treffen die Gerade P′P″ in den beiden gesuchten Punkten M′ und N′.

Diese Construction wurde von Brianchon *) zur Lösung der beiden Aufgaben verwendet, welche wir in Nr. 171 behandelt haben.

1. Einen Kegelschnitt zu construiren, von welchem drei Punkte P, P′, P″ und zwei Tangenten q und q' gegeben sind.

Die gegebenen Tangenten treffen PP′ in Q und Q′ und PP″ in R und R′. Aus Q und Q′ ziehen wir die Tangenten an den durch PP′P″ gelegten Kreis; die Berührungssehnen werden PP′ in zwei Punkten M und N schneiden; ziehen wir ebenso die Tangenten durch R und R′, so werden die Berührungssehnen PP″ in zwei anderen Punkten M′ und N′ schneiden. Dann wird jede der Geraden MN′, NN′, M′N, MM′ die Tangenten q und q' in zwei Berührungspunkten dieser beiden Geraden und des um das Dreieck PP′P″ beschriebenen Kegelschnittes treffen.

Diese Construction unterscheidet sich von der in Nr. 171 (links) gegebenen nur durch das Verfahren, die Doppelpunkte MN, M′N′ zu finden.

2. Einen Kegelschnitt zu construiren, von welchem zwei Punkte P′ und P″ und drei Tangenten q, q', q'' gegeben sind.

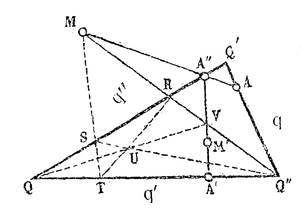
*) Brianchon, loc. cit., S. 47 und 51.

Die drei gegebenen Tangenten treffen P′P″ in drei Punkten Q, Q′, Q″ (Fig. 209). Aus den Punkten Q, Q′, Q″ ziehen wir die Tangenten an einen beliebigen durch P′P″ gehenden Kreis; die Berührungssehnen der von Q″ ausgehenden Tangenten combinirt mit den von Q ausgehenden treffen P′P″ in zwei Punkten M und N und die Berührungssehnen der von Q″ ausgehenden Tangenten, combinirt mit den von Q′ ausgehenden, bestimmen ebenso zwei Punkte M′ und N′.

Die Berührungssehne der Tangenten q und q'' an den gesuchten Kegelschnitt wird also durch M oder N und die Berührungssehne der Tangenten q' und q'' durch M′ oder N′ gehen. Die vier Combinationen M M′, M N′, N M′, N N′ geben die vier Auflösungen der Aufgabe.

Die Aufgabe ist also auf die folgende zurückgeführt: einen Kegelschnitt zu beschreiben, der drei gegebene Geraden q, q', q', in der Weise berührt, dass die Berührungssehnen der Tangenten $q\,q''$, $q'\,q''$ beziehungsweise durch zwei gegebene Punkte M und M′ gehen. Bezeichnen wir mit Q Q′ Q″ das von den drei gegebenen Tangenten gebildete Dreieck und mit A, A′, A″ die zu bestimmenden Berührungspunkte (Fig. 210). Nach einer Folgerung aus dem Lehrsatze von Desargues (152) wird die Seite

Fig. 210.



$q \equiv$ Q′Q″ durch den Berührungspunkt A und die Sehne A′A″ harmonisch getheilt. Werden diese vier harmonischen Punkte aus A″ auf M Q″ projicirt, so folgt daraus, dass der zwischen q' und q'' liegende Abschnitt R Q″ (von M Q″) durch M und die Gerade A′A″ harmonisch getheilt wird.

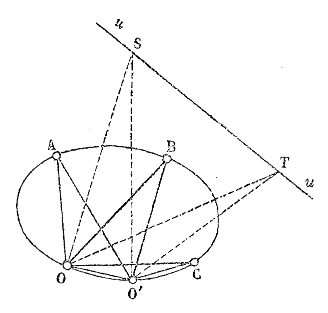
Ziehen wir also M Q″: diese Gerade wird q'' in R schneiden; bestimmen wir den Punkt V, welcher mit M die Strecke R Q″ harmonisch theilt. Zu diesem Zwecke ziehen wir durch M eine beliebige Gerade, welche q'' und q' in S und T schneiden wird und verbinden den Punkt Q mit dem Schnittpunkt U der

Geraden S Q″ und T R; diese Linie wird R Q″ in V treffen. Ziehen wir jetzt V M′; diese Gerade wird q' und q'' in A′ und A″ treffen und M A″ endlich wird Q′Q″ in A schneiden.

262. **Lehrsatz.** Werden zwei Winkel von unveränderlicher Grösse A O S und A O′S so um ihre Scheitel gedreht, dass der Schnittpunkt S des einen Schenkelpaares auf einer festen Geraden u bleibt, so beschreibt der Schnittpunkt A der beiden andern Schenkel einen Kegelschnitt (Fig. 211).

Der Beweis ergibt sich unmittelbar daraus, dass die von den beweglichen Strahlen O A und O S, O S und O′S, O′S und O′A

Fig. 211.



erzeugten Büschel projectivisch sind (36, 82). Dieser Lehrsatz wurde von Newton unter dem Namen „Organische Beschreibung der Kegelschnitte“ bekannt gemacht *).

Der Studirende wird sich die Aufgabe stellen, aus diesem Lehrsatz ein Verfahren abzuleiten, einen Kegelschnitt zu beschreiben, der durch fünf gegebene Punkte O, O′, A, B, C geht; oder, wenn diese fünf Punkte gegeben sind, die Grösse der beiden Winkel A O S und A O′S und die Gerade u der Art zu bestimmen, dass der erzeugte Kegelschnitt durch die fünf gegebenen Punkte geht.

Er kann auch übungsweise die folgenden Eigenschaften beweisen:

Beschreibt man über der Geraden O O′, welche die Scheitel der beiden gegebenen Winkel verbindet, ein Kreissegment, das einen Winkel fasst, der gleich dem Unterschied von vier rechten

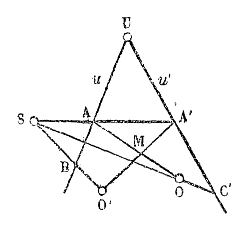
*) Loc. cit., Buch I, Lem. XXI.

Winkeln und der Summe der gegebenen Winkel ist, so wird der Kegelschnitt eine Hyperbel, eine Ellipse oder eine Parabel sein, je nachdem die Gerade u den Kreis schneidet, oder nicht schneidet, oder ihn berührt. — Die Asymptoten der Hyperbel, die Axen der Parabel zu bestimmen.

Wann ist der Kegelschnitt ein Kreis? Wann ist er eine gleichseitige Hyperbel?

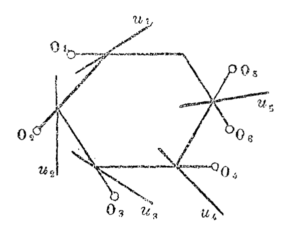
263. **Lehrsatz.** Verändert sich ein Dreieck der Art, dass sich seine Seiten um drei gegebene Punkte O, O′ und S drehen (Fig. 212), während zwei Eckpunkte A, A′ zwei feste Geraden

Fig. 212.



u und u' durchlaufen, so ist der Ort des dritten Eckpunktes M ein Kegelschnitt, welcher durch die Punkte O und O′, durch den Punkt uu' und durch die Punkte B′ und C′ geht, in welchen u und u' beziehungsweise von O′S und OS geschnitten werden.

Fig. 213.



264. **Lehrsatz.** (Der vorhergehende Lehrsatz ist ein besonderer Fall des folgenden.) Verändert sich ein Polygon der Art, dass sich seine Seiten um eben so viele feste Punkte O_1, O_2 $O_3, \ldots$ drehen (Fig. 213), während seine Eckpunkte, bis auf einen, die festen Geraden u_1, u_2, $u_3, \ldots$ durchlaufen, so beschreibt der letzte Eckpunkt einen Kegelschnitt; der Schnittpunkt von je

zwei nicht aufeinander folgenden Seiten hat ebenfalls einen Kegelschnitt zum geometrischen Ort *).

Man soll diesen Lehrsatz und seinen correlativen beweisen *1).

265. **Lehrsatz.** Sind zwei Winkel einem Kegelschnitt umschrieben, so sind die vier Berührungspunkte ihrer Schenkel und ihre Scheitel sechs Punkte eines Kegelschnittes.

Man wird diesen Satz beweisen, indem man zeigt, dass die beiden Büschel, welche die vier ersten Punkte aus den Scheiteln der beiden Winkel projiciren, projectivisch sind; zu diesem Zweck wird man beachten, dass die vier ersten Strahlen eine Gruppe bilden, welche zu der Gruppe ihrer Pole in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt projectivisch ist.

266. **Lehrsatz** (correlativ zu dem Vorhergehenden). Sind zwei Winkel einem Kegelschnitt umschrieben, so sind die vier Schenkel und die beiden Berührungssehnen sechs Tangenten desselben Kegelschnittes *2).

Man hat nur zu beweisen, dass die beiden Sehnen die vier anderen Geraden in zwei projectivischen Gruppen von Punkten schneiden; die erste Gruppe ist projectivisch zu derjenigen, welche von den Polaren in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt gebildet wird.

267. Aufgaben. I. Auf derselben Geraden sind drei Abschnitte AA', BB', CC' gegeben; man soll einen Punkt suchen, von welchem aus man sie alle drei unter gleichen Winkeln sehen kann (83).

Wann können diese Winkel rechte sein? (Siehe Nr. 98, II.)

II. Zwei aufeinander liegende, projectivische Punktreihen sind gegeben; man soll einen Punkt suchen, der von einem gegebenen Punkt auf der Geraden durch die beiden nicht gegebenen entsprechend gemeinschaftlichen Punkte harmonisch getrennt wird *3).

---

*) Lehrsatz von Maclaurin und Braikenridge (Philos. Trans. of London, 1735).

*1) Poncelet, loc. cit., Nr. 502.

*2) Chasles, Sections coniques, Nr. 213, 214.

*3) Chasles, Géom. sup., Nr. 269.

III. Zwei Punktenpaare einer Geraden sind gegeben: man soll auf dieser Geraden einen fünften Punkt der Art bestimmen, dass das Product seiner Abstände von den Punkten des ersten Paares zu dem Product seiner Abstände von den Punkten des zweiten Paares in einem gegebenen Verhältniss steht *).

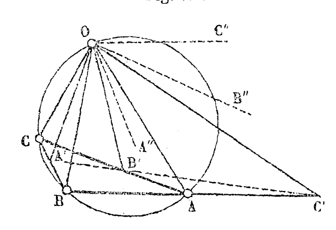
IV. Man soll durch einen gegebenen Punkt eine Transversale ziehen, welche auf zwei gegebenen Geraden, von zwei gegebenen Punkten aus gemessen, zwei Abschnitte bilde, deren Verhältniss oder Product gegeben ist *1).

268. **Lehrsatz.** Nimmt man auf jeder Diagonale eines vollständigen Vierseits zwei Punkte, die sie harmonisch theilen, und liegen drei dieser sechs Punkte (auf jeder Diagonale einer) in gerader Linie, so sind auch die drei andern auf einer Geraden.

Zusatz. Die drei Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer Geraden.

269. **Lehrsatz.** Ist ein Dreieck A B C einem Kreis eingeschrieben und fällt man von einem Punkt O des Umfanges auf

Fig. 214.



die Seiten schiefe Geraden O A′, O B′, O C′ unter gleichen Winkeln (von gleichem Sinne), so liegen die Fusspunkte A′, B′, C′ dieser Schiefen auf einer Geraden (Fig. 214).

Wir ziehen durch O die Geraden O A″, O B″, O C″ parallel zu B C, C A, A B; man wird leicht beweisen, dass die Winkel A O A″, B O B″, C O C″ dieselbe Halbirungslinie haben; also haben

---

*) Aufgabe de sectione determinata von Apollonius. Siehe Chasles, Géom. sup., Nr. 281 oder Diesterweg.

*1) Aufgaben de sectione rationis und de sectione spatii von Apollonius. Siehe Chasles, Géom. sup., Nr. 296 und 298 oder Diesterweg.